

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

UM ESQUEMA NUMÉRICO UTILIZANDO VARIÁVEIS CO-LOCALIZADAS COM
FUNÇÃO DE INTERPOLAÇÃO COMPLETA PARA A SOLUÇÃO DE¹ PROBLEMAS
DE ESCOAMENTO DE FLUIDOS

TESE SUBMETIDA À UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA PARA OBTENÇÃO DO GRAU
DE DOUTOR EM ENGENHARIA

SELENE MARIA DE ARRUDA GUELLI ULSON DE SOUZA

FLORIANÓPOLIS, MARÇO DE 1992.


UM ESQUEMA NUMÉRICO UTILIZANDO VARIÁVEIS CO-LOCALIZADAS COM
FUNÇÃO DE INTERPOLAÇÃO COMPLETA PARA A SOLUÇÃO DE PROBLEMAS
DE ESCOAMENTO DE FLUIDOS

SELENE MARIA DE ARRUDA GUELLI ULSON DE SOUZA

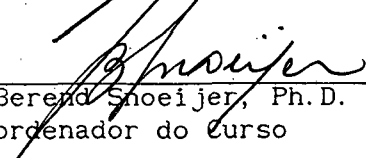
ESTA TESE FOI JULGADA ADEQUADA PARA OBTENÇÃO DO TÍTULO DE

DOCTOR EM ENGENHARIA

ESPECIALIDADE ENGENHARIA MECÂNICA, ÁREA DE CONHECIMENTO CIÊNCIAS TÉRMICAS E
APROVADA EM SUA FORMA FINAL PELO PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO



Prof. Clóvis Raimundo Maliska, Ph.D.
Orientador

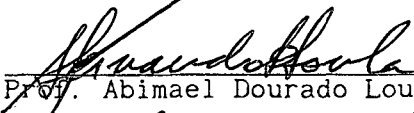


Prof. Berend Snoeijer, Ph.D.
Coordenador do curso

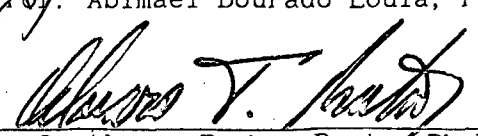
BANCA EXAMINADORA



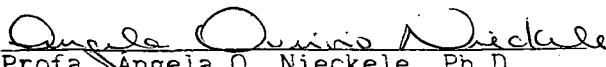
Prof. Clóvis Raimundo Maliska, Ph.D.
Presidente



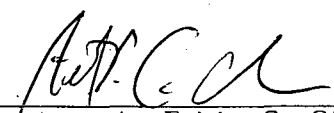
Prof. Abimael Dourado Loula, Ph.D.



Prof. Alvaro Toubes Prata, Ph.D.



Profa. Angela O. Nieckele, Ph.D.



Prof. Antonio Fabio C. Silva, Dr. Eng.

Ao meu esposo, Antônio Augusto e filhos,
Augusto e André, pelo apoio, compreensão
carinho e dedicação.

AGRADECIMENTOS

- Ao Professor Clóvis Raimundo Maliska, pela orientação e conhecimentos transmitidos.

- Aos Professores do Curso de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, pelos conhecimentos transmitidos.

- Aos colegas do SINMEC, pela colaboração na realização deste trabalho.

- Ao Departamento de Engenharia Química, pela oportunidade de realizar este Curso de Doutorado.

- A meus pais e irmãos, pelo apoio e amizade.

- E a todos aqueles que, das mais variadas formas, colaboraram na realização deste trabalho. m

ÍNDICE GERAL

LISTA DE QUADROS	viii
LISTA DE FIGURAS	ix
SIMBOLOGIA	xiii
RESUMO	xviii
ABSTRACT	xx
 CAPÍTULO 1 - INTRODUÇÃO	 1
 CAPÍTULO 2 - REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	 9
2.1 - Arranjo de variáveis co-localizadas versus arranjo de variáveis desencontradas	9
2.2 - Análise de alguns esquemas que empregam diferentes funções de interpolação com o arranjo de variáveis co- localizadas	21
2.2.1 - Esquema proposto por Peric et al. [33]	22
2.2.2 - Esquema proposto por Camarero et al. [34]	26
2.2.3 - Esquema proposto por Schneider [35]	30
2.2.4 - Esquema proposto por Majumdar [36]	36
2.2.5 - Esquema proposto por Schneider e Raw [31,32] ...	39
 CAPÍTULO 3 - FORMULAÇÃO PROPOSTA	 50
3.1 - Equações governantes	50
3.2 - Transformação das equações	56
3.3 - Discretização das equações	62
3.3.1 - Função de interpolação completa	67

CAPÍTULO 4 - MÉTODO DE SOLUÇÃO	80
4.1 - Tratamento do acoplamento pressão-velocidade	80
4.1.1 - Obtenção da equação para correção da pressão ...	80
4.1.2 - Cálculo do fluxo de massa nas faces do volume de controle	84
4.2 - Condições de Contorno	88
4.2.1 - Aplicação das condições de contorno para as componentes cartesianas da velocidade	88
4.2.2 - Aplicação das condições de contorno para a pressão	90
4.3 - Detalhes Numéricos	92
4.4 - Procedimento de Solução	93
CAPÍTULO 5 - RESULTADOS	96
5.1 - Cavidade quadrada com imposição de termo fonte na equação de conservação de quantidade de movimento	96
5.1.1 - Entrada de massa no contorno superior e saída de massa no contorno direito	97
5.1.2 - Perfil polinomial no contorno superior	100
5.2 - Convecção forçada em uma cavidade quadrada	107
5.3 - Transporte, com convecção dominante, de um salto na va- riável escalar ϕ	116
5.4 - Escoamento entre duas placas planas paralelas com res- trição de seção	130
CAPÍTULO 6 - CONCLUSÕES E SUGESTÕES	139
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	143

APÊNDICE A - Avaliação da variável ϕ nas faces do volume de controle	149
APÊNDICE B - Componentes do gradiente da variável ϕ na direção normal às faces do volume de controle	156
APÊNDICE C - Equação para avaliação da variável ϕ no centro do volume de controle	158
APÊNDICE D - Equação para correção da pressão no centro do volume de controle	162

LISTA DE QUADROS

QUADRO 1 - Expressões para ϕ , Γ^ϕ , P^ϕ , S^ϕ , na equação de conservação, em forma generalizada	54
QUADRO 2 - Valores de ϕ_{\min} obtidos por Ghia et al. [44], formulação proposta e WUDS, para os casos de Re 100, 400 e 1000	112
QUADRO 3 - Erro relativo máximo obtido no perfil da componente cartesiana da velocidade	115
QUADRO 4 - Erro relativo obtido com a formulação proposta e com o esquema WUDS, no cálculo de $(\partial\phi/\partial y)$, no centro do domínio, para $\theta = 0^\circ$ e $11,3^\circ$	123
QUADRO 5 - Erro relativo obtido com a formulação proposta e com o esquema WUDS, no cálculo de $(\partial\phi/\partial y)$, no centro do domínio, para $\theta = 30,9^\circ$ e 45°	124
QUADRO 6 - Erro relativo obtido com a formulação proposta e com o esquema WUDS, no cálculo da distância entre $\phi = 0,1$ e $\phi = 0,9$, em $x = 0,25$ e $\theta = 45^\circ$	126
QUADRO 7 - Erro relativo máximo obtido no perfil da componente cartesiana da velocidade, Re = 400	136
QUADRO 8 - Erro relativo máximo obtido no perfil da componente cartesiana da velocidade, Re = 1000	137

LISTA DE FIGURAS

FIGURA 1 - Localização das variáveis dependentes na malha	10
FIGURA 2 - Oscilação no campo de pressões ("checkerboard")	12
FIGURA 3 - Volumes de controle nas fronteiras para os arranjos de variáveis desencontradas e co-localizadas	14
FIGURA 4 - Arranjo das variáveis, na malha, adotado por Vanka et al. [16]	15
FIGURA 5 - Arranjo das variáveis, discutido por Maliska e Raithby [18] ...	17
FIGURA 6 - Arranjo das variáveis dependentes na malha, adotado por Rama- chandra e Spalding [19]	18
FIGURA 7 - Arranjo das variáveis dependentes na malha, adotado por Maliska e Raithby [18]	19
FIGURA 8 - Arranjo das variáveis na malha, adotado por Silva [10]	20
FIGURA 9 - Arranjo de variáveis co-localizadas	23
FIGURA 10 - Malha computacional proposta por Camarero et al. [34]	28
FIGURA 11 - Volume de controle do contorno utilizado no esquema proposto por Schneider [35]	34
FIGURA 12 - Velocidade na face do volume de controle do contorno, no esque- ma proposto por Schneider [35]	36
FIGURA 13 - Pontos de integração, elemento e volume de controle com quatro subvolumes de controle, do esquema adotado por Schneider e Raw [31]	41
FIGURA 14 - Elemento típico para aproximação do termo convectivo, utilizando o esquema "skew upwind", proposto por Schneider e Raw [31]	47
FIGURA 15 - Volume de controle utilizado para obtenção das equações discre- tizadas	63
FIGURA 16 - Notação utilizada na função de interpolação completa	68

FIGURA 17 - Pontos da malha computacional envolvidos no cálculo do fluxo de massa na face leste do volume de controle	87
FIGURA 18 - Uso de pontos fictícios para as componentes cartesianas da velocidade na fronteira oeste	89
FIGURA 19 - Extrapolação linear para a pressão na fronteira leste	91
FIGURA 20 - Especificação das condições de contorno para o problema da cavidade quadrada, com entrada e saída de massa	98
FIGURA 21 - Cavidade quadrada, com entrada e saída de massa, com malha 10x10	99
FIGURA 22 - Perfil da componente de velocidade, u , obtido ao longo da diagonal, com malha 10x10	100
FIGURA 23 - Especificação das condições de contorno para o problema da cavidade quadrada, com perfil polinomial no contorno superior ...	102
FIGURA 24 - Cavidade quadrada, com perfil polinomial no contorno superior, para malha 10x10	103
FIGURA 25 - Cavidade quadrada, com perfil polinomial no contorno superior, para malha 20x20	104
FIGURA 26 - Perfil da componente de velocidade, u , ao longo da linha central vertical, com malha 10x10	105
FIGURA 27 - Perfil da pressão, P , ao longo da linha central vertical, com malha 10x10	106
FIGURA 28 - Especificação das condições de contorno para o problema da cavidade quadrada	107
FIGURA 29 - Cavidade quadrada, com $Re = 100$, malha cartesiana 40x40	109
FIGURA 30 - Cavidade quadrada, com $Re = 400$, malha cartesiana 40x40	110
FIGURA 31 - Cavidade quadrada, com $Re = 1000$, malha cartesiana 40x40	111
FIGURA 32 - Perfil da componente de velocidade, u , para o caso de $Re = 400$, obtido com malhas cartesianas 20x20, 30x30 e 40x40 ..	113

FIGURA 33 - Perfil da componente de velocidade, u , para o caso de $Re = 1000$, obtido com malhas cartesianas 20×20 , 30×30 e 40×40 .	114
FIGURA 34 - Convecção dominante no transporte da variável ϕ , com velocidade uniforme	117
FIGURA 35 - Perfil de ϕ em $x = 0,25$, para o caso de $\theta = 0^\circ$, com malhas 10×10 , 20×20 e 40×40	119
FIGURA 36 - Perfil de ϕ em $x = 0,25$, para o caso de $\theta = 11,3^\circ$, com malhas 10×10 , 20×20 e 40×40	120
FIGURA 37 - Perfil de ϕ em $x = 0,25$, para o caso de $\theta = 30,9^\circ$, com malhas 10×10 , 20×20 e 40×40	121
FIGURA 38 - Perfil de ϕ em $x = 0,25$, para o caso de $\theta = 45^\circ$, com malhas 10×10 , 20×20 e 40×40	122
FIGURA 39 - Campo da variável ϕ , obtido com a formulação proposta, com malha 10×10 , $\theta = 45^\circ$	126
FIGURA 40 - Campo da variável ϕ , obtido com a formulação proposta, com malha 20×20 , $\theta = 45^\circ$	127
FIGURA 41 - Campo da variável ϕ , obtido com a formulação proposta, com malha 40×40 , $\theta = 45^\circ$	128
FIGURA 42 - Campo da variável ϕ , obtido com a formulação proposta, com malha 60×60 , $\theta = 45^\circ$	129
FIGURA 43 - Malhas 10×30 e 20×60 , utilizadas na solução do escoamento entre duas placas planas paralelas com restrição de seção	131
FIGURA 44 - Perfil da componente cartesiana de velocidade, u , nas seções A-A e B-B, no caso de $Re = 400$, malhas 10×30	132
FIGURA 45 - Perfil da componente cartesiana de velocidade, u , nas seções A-A e B-B, no caso de $Re = 400$, malhas 20×60	133
FIGURA 46 - Perfil da componente cartesiana de velocidade, u , nas seções A-A e B-B, no caso de $Re = 1000$, malhas 10×30	134

FIGURA 47 - Perfil da componente cartesiana de velocidade, u , nas seções A-A e B-B, no caso de $Re = 1000$, malhas 20×60	135
--	-----

SIMBOLOGIA

- a - comprimento do segmento de reta indicado na FIGURA 14, [L].
 a_i - coeficientes da equação discretizada onde $i = P, E, W, S, N$, etc.
 a_i^1 - coeficientes da equação discretizada, obtida para a face i , que multiplica ϕ_i
 A^u - variável definida pela equação (25)
 A^v - variável definida pela equação (26)
 A_1 - variável definida pela equação (20)
 A_2 - variável definida pela equação (22)
 A_3 - variável definida pela equação (21)
 b - comprimento do segmento de reta indicado na FIGURA 14, [L]
 b^ϕ - termo fonte da equação discretizada
 B - termo fonte volumétrico equivalente, dado pela equação (11), $[M\phi/(L^3t)]$
 \vec{B} - vetor força de campo por unidade de volume de fluido, $[M/L^2t^2]$
 B^u - variável definida pela equação (25)
 B^v - variável definida pela equação (26)
 c_p - calor específico do fluido, a pressão constante, $[L^2/t^2\theta]$
 C^u - variável definida pela equação (25)
 C^v - variável definida pela equação (26)
 C_1 - variável definida pela equação (91)
 C_2 - variável definida pela equação (92)
 C_3 - variável definida pela equação (93)
 CE - variável definida pela equação (14)
 CW - variável definida pela equação (13)
 d_p^ϕ - variável definida pela equação (172)
 D^u - variável definida pela equação (25)

- D^v - variável definida pela equação (26)
- DE - variável definida pela equação (15)
- e - energia total do fluido por unidade de massa, $[L^2/t^2]$
- E - variável definida pela equação (66), $[M\phi/(L^2t)]$
- \hat{E} - variável definida pela equação (73), $[M\phi/(L^2t)]$
- F - variável definida pela equação (67), $[M\phi/(L^2t)]$
- \hat{F} - variável definida pela equação (74), $[M\phi/(L^2t)]$
- g_x - componente da força do campo por unidade de massa, na direção x , $[L/t^2]$
- g_y - componente da força do campo por unidade de massa, na direção y , $[L/t^2]$
- H_p - variável definida pela equação (28)
- I - energia interna do fluido por unidade de massa, $[L^2/t^2]$
- J - jacobiano da transformação
- J_o - jacobiano da transformação inversa
- k - condutividade térmica do fluido, $[ML/(t^3\theta)]$
- L_c - escala de comprimento de convecção, $[L]$
- L_d - escala de comprimento de difusão, $[L]$
- $L[]$ - aproximação numérica da expressão no interior dos colchetes
- m - vazão mássica do fluido, $[M/t]$
- n - coordenada ao longo da direção normal à face do volume de controle, $[L]$
- N - função de interpolação
- P - pressão nas equações de Navier-Stokes, $[M/(Lt^2)]$
- p^ϕ - representa o gradiente de pressão na equação (59), $[M/(L^2t^2)]$
- \hat{p}^ϕ - variável definida pela equação (78), $[M/L^2t^2]$
- $P(i,j)$ - ponto com coordenadas $x = i$ e $y = j$
- Pe - número de Peclet = $p u \Delta x / \Gamma^\phi$
- q - produto da variável ϕ pela massa específica do fluido, dado pela equação (65), $[M\phi/L^3]$
- \vec{q}'' - fluxo difusivo de calor, $[M/t^3]$

- q''' - taxa de energia térmica liberada por unidade de volume de fluido, $[M/Lt^3]$
- R - variável definida pela equação (68), $[M\phi/(L^2t)]$
- \hat{R} - variável definida pela equação (75), $[M\phi/(L^2t)]$
- s - coordenada ao longo da linha de corrente, $[L]$
- S - variável definida pela equação (69), $[M\phi/(L^2t)]$
- \hat{S} - variável definida pela equação (76), $[M\phi/(L^2t)]$
- S^ϕ - termo fonte das equações de conservação, $[M\phi/(L^3t)]$
- \hat{S}^ϕ - variável definida pela equação (77), $[M\phi/(L^3t)]$
- t - tempo, $[t]$
- T - temperatura absoluta, $[\theta]$
- u - componente da velocidade, na direção x , no sistema cartesiano, $[L/t]$
- U - componente contravariante da velocidade, sem normalização métrica, $[L/t]$
- v - componente velocidade, na direção y , no sistema cartesiano, $[L/t]$
- V - componente contravariante da velocidade, sem normalização métrica, $[L/t]$
- \vec{V} - vetor velocidade do fluido, $[L/t]$
- $|\vec{V}|$ - magnitude do vetor velocidade = $|u^2 + v^2|^{1/2}$, $[L/t]$
- x - coordenada do sistema cartesiano, $[L]$
- y - coordenada do sistema cartesiano, $[L]$

LETRAS GREGAS

- α - componente do tensor métrico da transformação, dada pela equação (94)
- α_u - parâmetro de subrelaxação
- β - componente do tensor métrico da transformação, dada pela equação (95)
- β_f - coeficiente de expansão térmica do fluido, $[\theta^{-1}]$

- γ - componente do tensor métrico da transformação, dada pela equação (96)
- Γ^ϕ - difusividade relativa à variável ϕ multiplicada pela massa específica do fluido, $[M/(Lt)]$
- η - coordenada do sistema generalizado, no plano transformado, $[L]$
- θ - instante de tempo intermediário entre os instantes t e $t + \Delta t$, do intervalo de tempo Δt
- λ - segundo coeficiente de viscosidade, $[M/(Lt)]$
- μ - viscosidade dinâmica do fluido, $[M/(Lt)]$
- ξ - coordenada do sistema generalizado, no plano transformado, $[L]$
- ρ - massa específica do fluido, $[M/t^3]$
- $\bar{\tau}$ - tensor tensão, $[M/Lt^2]$
- τ_{ij} - componente do tensor tensão, $[M/Lt^2]$
- ϕ - campo escalar geral
- Φ - função dissipação, $[t^{-2}]$

ÍNDICES SUPERIORES

- e,n,s,w - valores relativos às faces leste, norte, sul e oeste do volume de controle centrado em P
- ' - correção da variável
- *
- estimativa da variável
- o - valores obtidos de iteração prévia
- P - valores relativos à equação da pressão
- T - valores relativos à equação de conservação de energia
- u - valores relativos à equação de conservação de quantidade de movimento na direção x
- v - valores relativos à equação de conservação de quantidade de movimento na direção y

ÍNDICES INFERIORES

- e, n, s, w, se, sw, ne, nw - valores relativos às faces leste, norte, sul, oeste, sudeste, sudoeste, nordeste e noroeste, respectivamente, do volume de controle centrado em P
- ii - valores relativos à face i do volume de controle centrado em I
- E, N, S, W, SE, SW, NE, NW - valores relativos aos volumes de controle vizinhos ao volume de controle centrado em P
- b - ponto do contorno do volume de controle, definido na FIGURA 11
- ipi - ponto de integração, definido na FIGURA 13
- fi - face i do volume de controle centrado em P
- n - direção normal à face do volume de controle
- nb - pontos vizinhos ao ponto P, como E, W, N, S, etc.
- u - valor "upwind", definido nas equações (44) e (45)
- x - derivada parcial com relação à coordenada x, do sistema cartesiano de coordenadas
- y - derivada parcial com relação à coordenada y, do sistema cartesiano de coordenadas
- ξ - derivada parcial com relação à coordenada ξ , do sistema de coordenadas generalizadas
- η - derivada parcial com relação à coordenada η , do sistema de coordenadas generalizadas

RESUMO

A disponibilidade, cada vez mais fácil, de computadores de grande porte tem motivado engenheiros e cientistas ao uso de técnicas numéricas para a solução de problemas cada vez mais complexos. Assim, em todas as áreas da física e da engenharia, observa-se, atualmente, um impressionante número de aplicações de modelos numéricos. Esta demanda tem impulsionado significativamente o desenvolvimento destes modelos e, principalmente, tem incentivado a realização de pesquisas no sentido de remover dificuldades importantes que estes modelos apresentam. Dentro destas dificuldades podemos destacar duas delas, que praticamente respondem pela qualidade do método numérico: a grande memória computacional requerida e os erros devidos ao uso inadequado de funções de interpolação, denominados erros de difusão numérica.

Para contribuir na remoção da primeira dificuldade, é proposto neste trabalho o uso de variáveis co-localizadas, onde todas as variáveis possuem o mesmo volume elementar de integração. Para problemas que procuram simular mais realisticamente a física do fenômeno e que, geralmente, envolvem geometrias irregulares em três dimensões, este procedimento economiza enorme memória computacional se comparado com modelos que empregam variáveis desconstruídas.

O correto acoplamento pressão-velocidade empregando variáveis co-localizadas é conseguido criando-se equações obtidas através de interpolação da equação de conservação da quantidade de movimento, para aquelas variáveis que são necessárias em locais onde não estão armazenadas.

No que diz respeito à difusão numérica, o mais sério problema que desafia os analistas numéricos, é proposto neste trabalho o emprego de uma função de interpolação originária da própria equação diferencial que se deseja resolver. Esta função de interpolação, denominada neste trabalho de função de

interpolação completa, possui a dimensionalidade que o problema requer e contém todas as influências físicas presentes na equação diferencial a ser resolvida. Desta forma, evita-se o uso de funções de interpolação unidimensionais em problemas bidimensionais, um fator bastante conhecido como causador de grandes erros na solução.

A nova metodologia é testada resolvendo-se problemas bem escolhidos cujas soluções analíticas, ou obtidas com malhas bem refinadas, são disponíveis. Os resultados demonstraram que o procedimento desenvolvido é bastante promissor.

ABSTRACT

The fast growing in the capabilities of modern digital computers is strongly motivating engineers and scientists to the use of numerical tools for the solution of very complex problems. It is astonishing to realize how intensively are numerical tools been employed in all branches of physics and engineering. This picture has motivated the development of numerical methods and a lot of effort has been put in removing difficulties still present in the numerical techniques for the solution of fluid flow problems. Among these difficulties two are of significance, namely, the need of large computer memory and the presence of errors associated with numerical diffusion.

A step in the direction of alleviating the first difficulty is proposed in this work, by using a co-located arrangement of the variables, promoting considerable savings in computer memory in comparison with the staggered approach. A proper pressure-velocity coupling is maintained to avoid pressure wiggles in the solution.

To eliminate the numerical diffusion errors, it is proposed to use a interpolation function, called here complete interpolation function which is derived from the same partial differential equation to be solved. This avoids the use of one-dimensional interpolation function in multi-dimensional problems, the origin of the numerical diffusion, with the corresponding transient, convection, diffusion, pressure and source effects being taking into account properly.

The proposed methodology is assessed by solving well chosen problems whose solutions are compared with analytical or grid refined numerical solutions. The results demonstrated that the new approach herein proposed is very promissing.

CAPÍTULO 1

INTRODUÇÃO

A solução de problemas da engenharia, envolvendo escoamento de fluidos, com transferência de calor e massa, requer a solução de um conjunto de equações diferenciais parciais não lineares acopladas, que expressam a conservação da massa, quantidade de movimento, energia, espécie química e de outras propriedades, como por exemplo, energia cinética turbulenta e dissipação da energia cinética turbulenta, quando o modelo (k- ϵ) for utilizado para modelar as tensões turbulentas.

Devido às não linearidades e ao forte acoplamento existente entre as equações, na maioria dos casos, torna-se necessária a utilização de métodos numéricos para a obtenção da solução destes problemas. Na aplicação destes métodos, as equações diferenciais são discretizadas, gerando um conjunto de equações algébricas, que ainda mantém as não linearidades e o acoplamento entre as equações diferenciais originais através dos coeficientes, que dependem da solução do problema. Se o conjunto completo de equações algébricas fosse resolvido por um método direto, seriam necessárias diversas iterações, com coeficientes atualizados sucessivamente, devido às não linearidades. O número de equações algébricas, em geral, é tão elevado que o custo envolvido na utilização de solução direta torna-se proibitivo, sendo os sistemas de equações algébricas resolvidos sequencialmente. Para obter-se a solução do conjunto completo de equações, devido ao acoplamento existente entre elas, cada sistema precisa ser resolvido várias vezes mesmo que os coeficientes sejam mantidos inalterados. No caso particular da solução de problemas que envolvem escoamento

de fluidos, o tratamento deste acoplamento é extremamente importante para o sucesso da formulação.

A maioria dos métodos numéricos pode ser derivada do método de resíduos ponderados. O método de diferenças finitas [1,2] resulta quando a função peso escolhida é a função delta, centrada no ponto P . O método clássico de elementos finitos de Galerkin [3,4,5] utiliza, como função peso, as funções tentativas do problema. O método de volumes finitos [1,2,6,7] utiliza a função peso unitária para o volume de controle centrado em P e nula para o restante do domínio de integração. Desde que os métodos discretos mais empregados diferem somente na escolha da função peso e desde que nenhum único peso fornecerá sempre valores das variáveis mais precisos ou equações mais fáceis para solução, pode dizer-se que nenhum método discreto é inerentemente superior a outro [8].

A minimização do resíduo, no método de volumes finitos, é equivalente a satisfazer a conservação das variáveis do problema sobre cada volume de controle. Quando não ocorrer sobreposição do volume de controle com seus vizinhos, será fácil criar um conjunto de equações discretas que satisfaçam o balanço global de conservação. A garantia de que os princípios de conservação serão satisfeitos, a nível elementar e global, é que torna o método de volumes finitos atrativo. Além disto, provavelmente, o grande impulso observado no desenvolvimento de métodos numéricos, para solução de problemas que envolvem escoamento de fluidos, aconteceu quando a concepção dos algoritmos começou a ser fundamentada na fenomenologia física do problema em questão. As dificuldades associadas ao acoplamento e às não linearidades das equações foram sempre alvo dos trabalhos dos pesquisadores, o que ocasionou um grande avanço na área.

O método de elementos finitos, geralmente, utiliza malhas não estruturadas, isto é, seus pontos discretos não seguem nenhuma regra de

formação, proporcionando maior facilidade de concentração dos pontos onde desejado e, conseqüentemente, maior flexibilidade ao algoritmo. O método de diferenças finitas e o método de volumes finitos, normalmente, utilizam malhas estruturadas, sendo que a conexão entre os pontos é estabelecida através de um sistema de coordenadas.

As malhas estruturadas, por outro lado, apresentam maior facilidade de implementação computacional e são mais adequadas para esquemas iterativos de solução dos sistemas lineares, quando comparadas com as malhas não estruturadas. Para a utilização de malhas não estruturadas, é necessário que o sistema de coordenadas seja local, sendo que normalmente é utilizado o sistema cartesiano. No caso de malhas estruturadas, a equação diferencial pode ser transformada para um sistema de coordenadas generalizadas, o que facilita a integração da equação diferencial no volume elementar.

No contexto de volumes finitos, o uso de coordenadas generalizadas, que se adaptam à fronteira, tem recebido uma enorme atenção dos pesquisadores devido à generalidade que confere aos métodos, podendo obter-se a solução em um domínio computacional fixo, independente da geometria física do problema.

Os principais passos que devem ser realizados para o desenvolvimento e implementação de esquemas numéricos, para solução de problemas de escoamento de fluidos incompressíveis, são:

- (a) a escolha adequada da localização das variáveis dependentes na malha;
- (b) o tratamento do acoplamento entre a pressão e a velocidade;
- (c) a obtenção da função de interpolação entre os pontos discretos;
- (d) a escolha da seqüência de solução das equações diferenciais;
- (e) a escolha do método de solução do sistema de equações lineares.

Neste trabalho, grande ênfase será dada à escolha adequada da localização das variáveis dependentes na malha e à obtenção de uma função de interpolação entre os pontos discretos, visando a minimização de erros numéricos.

A importância da escolha adequada da disposição das variáveis na malha computacional deve ser enfatizada devido às consequências desta escolha na forma das equações discretizadas, facilidade e precisão de solução. Um estudo das alternativas de localização das variáveis dependentes na malha, para sistemas de coordenadas generalizadas, pode ser encontrado nos trabalhos de Maliska [7], de Shih, Tan e Hwang [9] e, mais recentemente, no trabalho de Silva [10].

Na solução de problemas envolvendo as equações de Navier-Stokes, um grande avanço foi conseguido com o uso de malhas desencontradas, em virtude dos pontos de pressão estarem localizados nas faces do volume de controle para o balanço de quantidade de movimento, proporcionando o acoplamento adequado entre os campos de pressão e velocidade.

Hoje, praticamente, todos os códigos computacionais existentes, com exceção dos códigos desenvolvidos no contexto de diferenças finitas para escoamentos supersônicos, utilizam as variáveis dependentes localizadas de uma maneira desencontrada na malha, pois as vantagens, do ponto de vista de estabilidade do método, são fundamentais.

A malha desencontrada introduziu, entretanto, com relação à programação computacional, maior complexidade no controle dos índices dos respectivos volumes de controle das variáveis, uma vez que os volumes para as componentes da velocidade e pressão não são coincidentes, bem como, necessidade de maior capacidade de memória para armazenamento das informações geométricas, principalmente nos escoamentos tridimensionais em geometrias arbitrárias. O uso de esquemas diferentes de indexação para identificação das várias variáveis de

solução, com os índices nodais discretos, necessários nos esquemas envolvendo variáveis desencontradas, pode levar a sistemas de equações algébricas com estrutura marcadamente diferente, influenciando a eficiência dos algoritmos de solução das equações algébricas.

Para o arranjo de variáveis co-localizadas, que apresenta um único conjunto de volumes de controle, os coeficientes nas equações discretizadas para as duas componentes da velocidade são idênticos. Quando outras variáveis estiverem envolvidas (temperatura, concentração, energia cinética turbulenta, taxa de dissipação de energia cinética, etc.) então, a parte convectiva dos coeficientes permanecerá a mesma para todas as variáveis. Este fato pode não propiciar uma enorme economia de memória computacional, quando esquemas simples de discretização, como "upwind", forem empregados, mas aumenta consideravelmente a eficiência do algoritmo quando esquemas mais elaborados, como o método de discretização "skew upwind" [11], forem empregados.

Com a necessidade da solução de problemas cada vez mais complexos e em três dimensões, o esforço extra no uso da configuração de variáveis desencontradas torna-se considerável. Para eliminar esta dificuldade, o caminho natural é voltar à formulação inicial e localizar todas as variáveis dependentes no mesmo ponto sendo, então, todos os volumes elementares coincidentes. É necessário, portanto, obter uma formulação que proporcione o correto acoplamento entre a pressão e a velocidade.

Neste trabalho, é utilizada uma formulação que emprega o arranjo de variáveis co-localizadas em conjunto com o uso de coordenadas generalizadas que se adaptam à fronteira, com o adequado tratamento do acoplamento pressão-velocidade, visando a necessidade de menor memória computacional para armazenamento das informações geométricas e facilidade de manipulação dos índices dos volumes de controle das variáveis relevantes do problema em estudo, uma vez que todas as variáveis dependentes estão armazenadas no mesmo ponto.

O mais grave problema encontrado na simulação numérica de escoamento de fluidos é a especificação da função de interpolação. Problemas que apresentam descontinuidade na função, como ondas de choque ou escoamentos bifásicos, dependem da qualidade da função de interpolação para a boa representação das descontinuidades.

Diversas estratégias são utilizadas para a avaliação das variáveis nas faces do volume de controle. Spalding [12] desenvolveu o esquema híbrido, na tentativa de levar em conta os efeitos físicos relevantes do problema, na função de interpolação. Baseando-se na formulação apresentada por Spalding [12], Raithby e Torrance [13] propuseram o esquema exponencial, EDS. Vários outros esquemas, derivados do exponencial, são amplamente utilizados, como por exemplo, o esquema WUDS, apresentado por Raithby [14] ou o esquema "power law", descrito por Patankar [2]. Estes esquemas recaem nos esquemas "upwind" ou central, quando a convecção ou difusão é dominante. Estas funções de interpolação unidimensionais levam em conta somente a influência dos dois pontos vizinhos à face do volume de controle em questão, apresentando grandes erros, quando a malha não se encontra alinhada com o vetor velocidade. Tais erros, conhecidos como difusão numérica, podem comprometer severamente a qualidade da solução.

Outros esquemas utilizam correções para levar em conta a inclinação do vetor velocidade com relação à malha, sendo que este procedimento não considera todas as influências físicas relevantes do problema em estudo.

Neste trabalho, é proposta a utilização de uma função de interpolação completa, assim chamada por conter todos os termos que influenciam a equação diferencial. A metodologia proposta utiliza uma função de interpolação bidimensional, que contém a influência dos termos transiente, convectivo, difusivo, de pressão e fonte, obtida da própria equação de conservação, visando a minimização de erros numéricos através de uma adequada avaliação das

variáveis nas faces do volume de controle. Os estudos nesta direção representam uma contribuição no desenvolvimento de métodos robustos e gerais para a solução de problemas de Transferência de Calor e Mecânica dos Fluidos.

A seguir serão apresentados os conteúdos dos capítulos do presente trabalho, de forma sucinta.

CAPÍTULO 2 - REVISÃO BIBLIOGRÁFICA - Neste capítulo, são discutidas as diferentes disposições das variáveis na malha computacional, salientando-se as vantagens e desvantagens de cada disposição. Esquemas propostos por diversos pesquisadores, utilizando o arranjo de variáveis co-localizadas, são analisados.

CAPÍTULO 3 - FORMULAÇÃO PROPOSTA - São apresentadas, neste capítulo, as equações de conservação utilizadas para a obtenção da solução de problemas de escoamento de fluidos, em coordenadas cartesianas e a transformação das mesmas para o sistema de coordenadas generalizadas. A obtenção das equações discretizadas, utilizando-se o método de volumes finitos, bem como, a obtenção da função de interpolação completa são apresentadas.

CAPÍTULO 4 - MÉTODO DE SOLUÇÃO - Neste capítulo, é discutido o tratamento do acoplamento pressão-velocidade. A obtenção da equação para correção da pressão e o procedimento de solução são apresentados. São discutidas, ainda, as condições de contorno para a pressão e componentes cartesianas da velocidade, bem como, alguns detalhes numéricos.

CAPÍTULO 5 - RESULTADOS NUMÉRICOS OBTIDOS - A análise dos resultados numéricos obtidos com a utilização da formulação proposta e de outros esquemas encontrados na literatura, para a solução dos problemas de teste escolhidos, é

apresentada neste capítulo. Para análise do desempenho da função de interpolação completa, são discutidos os erros obtidos com a utilização da formulação proposta e de outros esquemas, calculados com referência às soluções obtidas analiticamente ou com a utilização de malhas bastante refinadas, encontradas na literatura.

CAPÍTULO 6 - CONCLUSÕES E SUGESTÕES - Neste capítulo, são apresentadas as principais conclusões obtidas neste trabalho, bem como, sugestões para futuros desenvolvimentos nesta área.

CAPÍTULO 2

REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

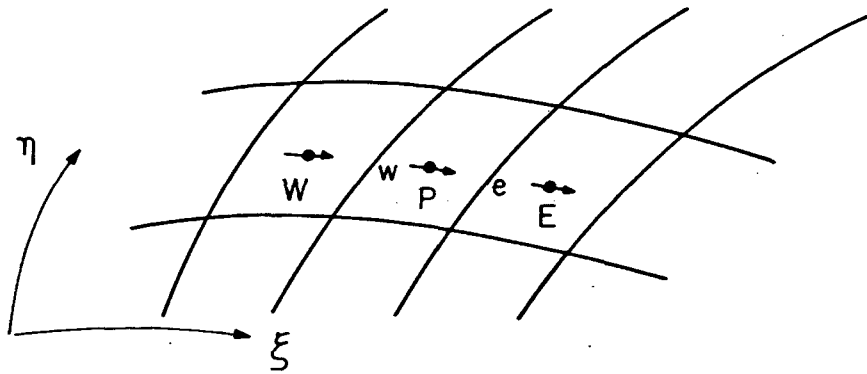
2.1 - ARRANJO DE VARIÁVEIS CO-LOCALIZADAS VERSUS ARRANJO DE VARIÁVEIS DESENCONTRADAS

Considerando-se o grande número de variáveis envolvidas na solução de um problema específico, são possíveis diversas configurações, para as variáveis, na malha computacional. A FIGURA 1a apresenta a configuração de variáveis co-localizadas ("*colocated*"), onde todas as variáveis dependentes estão armazenadas no mesmo ponto, possuindo todas o mesmo volume elementar, enquanto que, na FIGURA 1b, é mostrado o arranjo de variáveis desencontradas ("*staggered*"), onde as componentes da velocidade estão defasadas em relação a outras variáveis do problema (P , T , ρ , μ , etc.). A idéia do arranjo de variáveis desencontradas foi introduzida por Harlow e Welch [15], que utilizaram o sistema cartesiano.

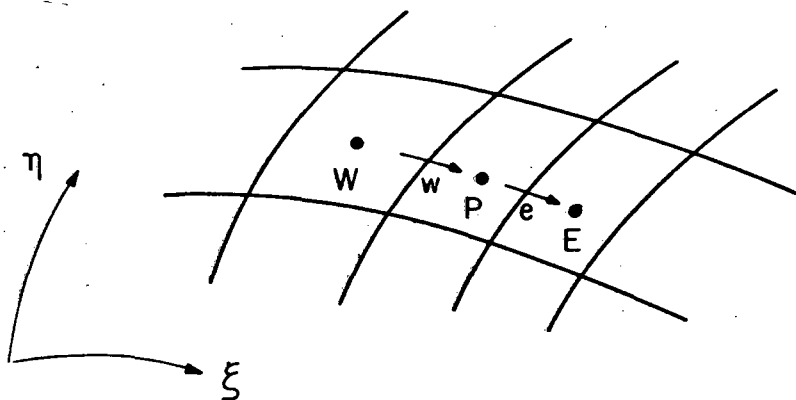
Com a grande divulgação do livro de Patankar [2], o arranjo de variáveis desencontradas foi amplamente difundido e é muito empregado atualmente nos códigos computacionais desenvolvidos para solução de problemas de transferência de calor, quase sempre associados a escoamentos de fluidos incompressíveis. O arranjo de variáveis co-localizadas, por sua vez, começa a receber bastante atenção dos pesquisadores devido a sua simplicidade. As dificuldades associadas ao mesmo estão sendo paulatinamente resolvidas.

Por exemplo, no arranjo de variáveis co-localizadas, a equação da conservação de quantidade de movimento aplicada a um problema unidimensional

exigirá interpolação para obtenção das velocidades e pressões nas faces da célula (faces w e e, da FIGURA 1a), necessárias ao cálculo dos fluxos convectivos e gradiente de pressão, respectivamente.



a) Arranjo de variáveis co-localizadas



b) Arranjo de variáveis desencontradas

→ localização de u.

• localização de P, ρ, μ, T , etc.

FIGURA 1 - Localização das variáveis dependentes na malha.

Para a equação da conservação da massa, interpolação será necessária para obtenção das velocidades nas faces da célula que serão utilizadas no cálculo dos fluxos mássicos que saem e entram no volume de controle.

Para os volumes de controle utilizados no balanço de conservação de quantidade de movimento (entre os pontos W e P, da FIGURA 1b), no arranjo de variáveis desencontradas, será necessária a interpolação para obtenção das velocidades em suas faces. Estes volumes de controle já possuem as pressões armazenadas em suas faces (pontos W e P), não necessitando de interpolação para avaliação das pressões em tais faces utilizadas no cálculo do gradiente de pressão. Para o volume de controle utilizado no balanço de conservação de massa (entre as faces w e e, da FIGURA 1b), não será necessária nenhuma interpolação pois as velocidades já se encontram armazenadas nas faces destes volumes de controle.

Segundo Patankar [2], no arranjo de variáveis co-localizadas, o campo de pressão discreto não está unicamente especificado, na solução de problemas incompressíveis e a oscilação no campo de pressão ("*checkerboard*") poderá ocorrer. Este problema está ilustrado na FIGURA 2, considerando-se um campo de pressão construído com quatro valores arbitrários.

No problema bidimensional, para um volume de controle centrado em P, ilustrado na FIGURA 2, a quantidade de movimento na direção x é influenciada pelo gradiente de pressão dado por $(P_W - P_E)$, enquanto que a quantidade de movimento na direção y é influenciada pelo gradiente de pressão dado por $(P_S - P_N)$. Para este problema ilustrado na FIGURA 2, nenhuma força de pressão será introduzida nas direções x ou y , e neste caso, um campo de pressão altamente não uniforme será tratado como um campo uniforme. Este campo de pressão poderá ser resultado de um procedimento iterativo de solução e a presença deste campo não será detectada na equação de conservação de quantidade de movimento, conforme Patankar [2].

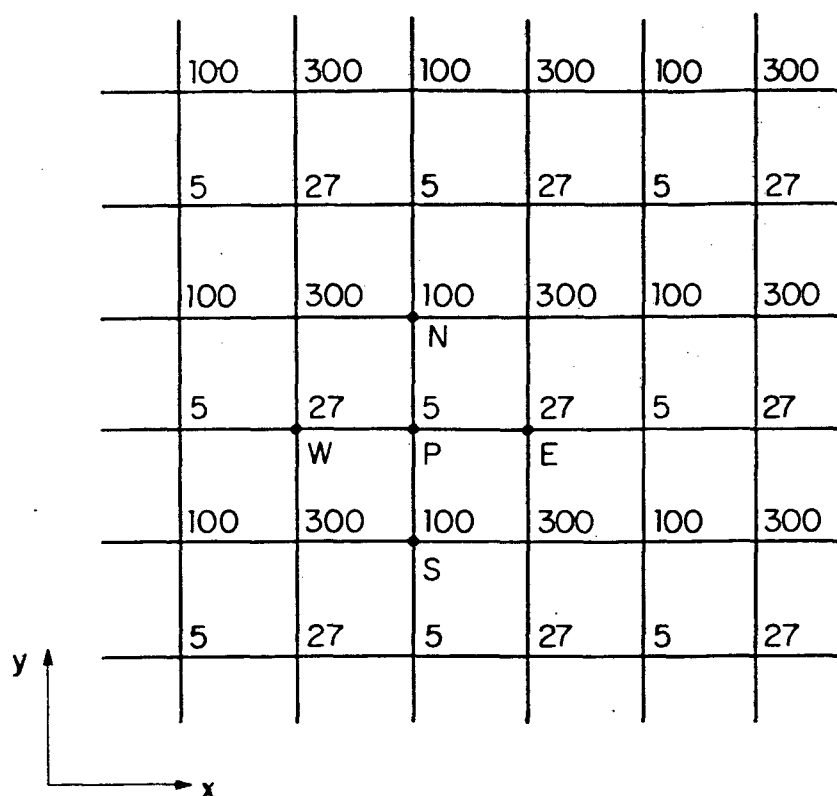


FIGURA 2 - Oscilação no campo de pressões ("checkerboard").

Este campo oscilatório de pressão poderá ocorrer em esquemas que utilizam o ponto P e apenas seus quatro vizinhos (N, S, E e W) para expressar a conservação de uma dada variável, podendo ser resultante de uma avaliação inadequada da variável conservada nas faces do volume de controle. Este problema pode ser contornado pela utilização de funções de interpolação mais complexas, que utilizam o gradiente de pressão responsável pela componente do vetor velocidade na face do volume de controle.

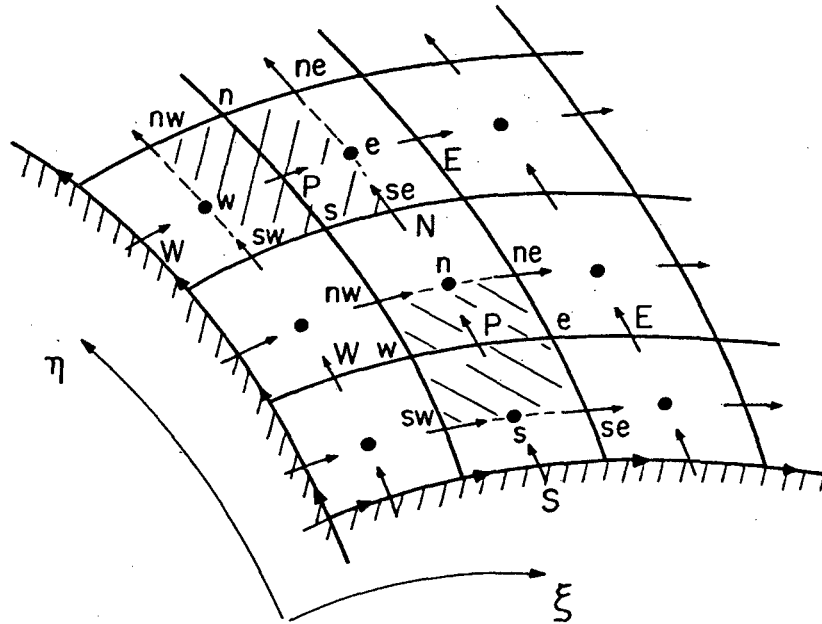
Na opinião do autor, a questão principal refere-se à construção da equação para correção da pressão. Se os fluxos de massa, que tomam parte da equação da conservação da massa, forem avaliados adequadamente, utilizando-se gradientes de pressão consistentes, o problema de oscilação no campo de pressão será eliminado, independente do tipo de arranjo empregado.

Na configuração de variáveis desencontradas, quando da implementação

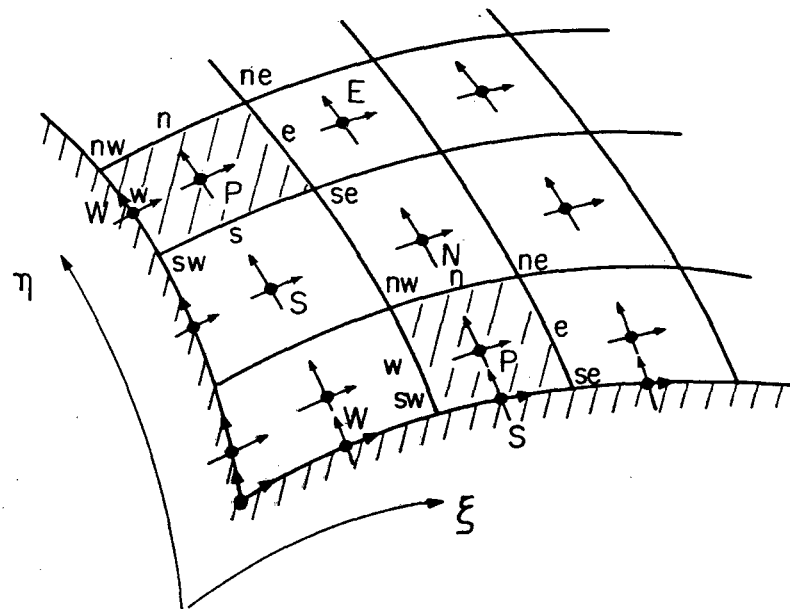
das condições de contorno, aparece o meio volume de controle próximo aos contornos leste e oeste, para a equação da conservação de quantidade de movimento na direção x , e próximo aos contornos sul e norte, para a equação de conservação de quantidade de movimento na direção y , conforme mostra a FIGURA 3a, onde é ilustrado um possível esquema de armazenamento das variáveis na malha computacional. Este meio volume de controle, normalmente, é tratado distintamente dos outros volumes de controle, no código computacional. Com o arranjo de variáveis co-localizadas, este fato não ocorre posto que as faces do volume de controle coincidem com as fronteiras, de maneira que, conforme ilustra a FIGURA 3b, as posições de w e W são coincidentes.

Para malhas ortogonais, o arranjo de variáveis desencontradas apresenta algumas vantagens pois, devido à omissão do meio volume de controle próximo às fronteiras do processo de integração, para quantidade de movimento, os valores de pressão no contorno não aparecem nas equações discretizadas. Como as velocidades normais às fronteiras são normalmente prescritas, condições de contorno de gradiente nulo podem ser especificadas para a equação para correção da pressão, de maneira que nenhuma referência explícita às pressões nas fronteiras é feita. Com relação à equação para correção da pressão, o mesmo é verdadeiro para o arranjo de variáveis co-localizadas. Porém, na equação de conservação da quantidade de movimento, valores de pressão nos pontos da fronteira são requeridos para cálculo do gradiente de pressão.

Uma outra possibilidade de configuração das variáveis, que foi adotada por Vanka et al. [16], é mostrada na FIGURA 4. Nesta configuração, as componentes de velocidade u e v estão ambas localizadas no mesmo ponto, ou seja, nos vértices do volume de controle para a pressão. Esta configuração introduz uma média no campo de pressão, utilizado para o cálculo do gradiente de pressão, que aparece na equação da conservação da quantidade de movimento, podendo gerar o problema do campo oscilatório de pressão, já discutido.



a) Arranjo de variáveis desencontradas



b) Arranjo de variáveis co-localizadas

//// volume de controle para u

\\\\ volume de controle para v

→ localização de u

↑ localização de v

• localização de $P, \rho, \mu, T, \text{etc.}$

FIGURA 3 - Volumes de controle nas fronteiras para os arranjos de variáveis desencontradas e co-localizadas.

Outro inconveniente desta configuração apresentada na FIGURA 4 é que, para o cálculo das velocidades na face do volume de controle para a massa, será necessária a utilização de média entre as velocidades localizadas nos vértices correspondentes àquela face.

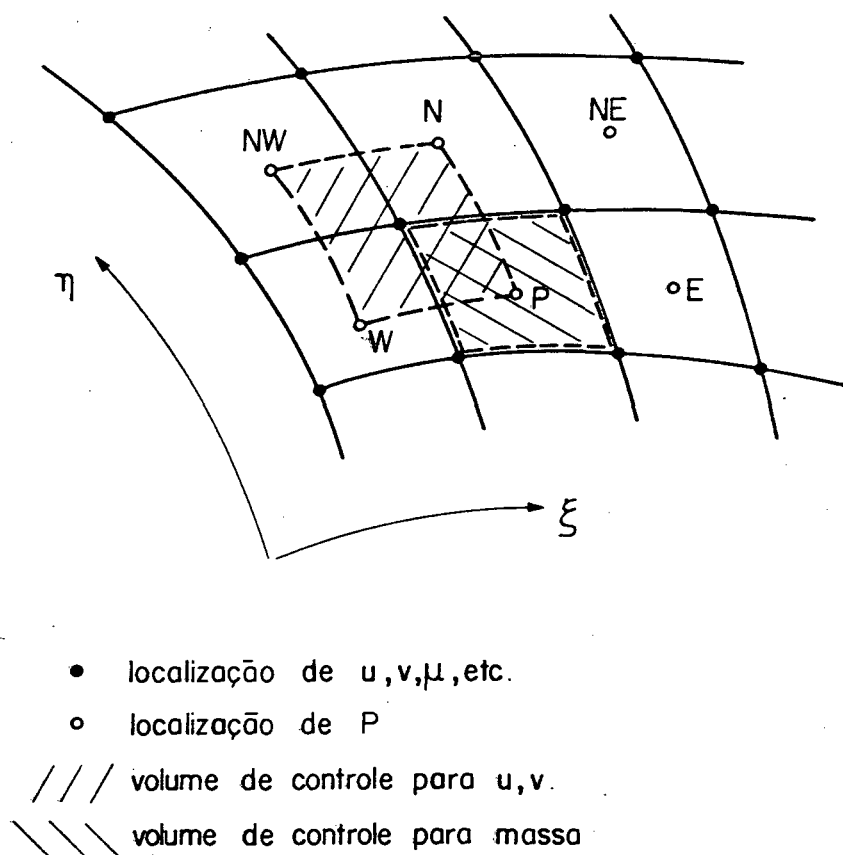


FIGURA 4 - Arranjo das variáveis na malha, adotado por Vanka et al. [16].

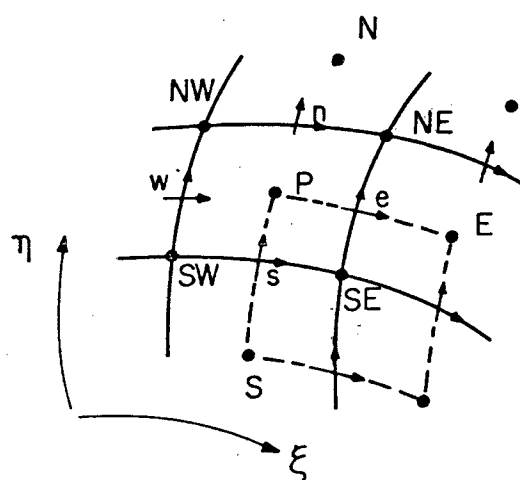
Quando as velocidades na face do volume de controle para a massa forem inseridas na equação da conservação da massa, para obtenção da equação para correção da pressão, então, a pressão do ponto P , por exemplo, será fortemente influenciada pelos pontos de pressão vizinhos na diagonal (P_{NE} , P_{SE} , P_{NW} , P_{SW}) e não pelos quatros paralelos (P_W , P_E , P_S , P_N), como usual. Para calcular-se o gradiente de pressão, responsável pela componente de velocidade, u , no vértice

superior direito do volume de controle centrado em P, por exemplo, então, a média entre P_N e P_P é subtraída da média entre P_{NE} e P_E . Para a equação da conservação da massa, para o volume de controle centrado em P, é necessária a obtenção das velocidades nas faces, por exemplo, através da média entre as velocidades nos vértices. Estes dois processos de média fazem com que a conservação da massa seja satisfeita se as pressões P_{NE} , P_{SE} , P_{SW} e P_{NW} estiverem corretas, independente dos valores das pressões P_N , P_S , P_E e P_W .

A equação da conservação da massa escrita para o volume de controle centrado em E, mostrado na FIGURA 4, dependerá somente de P_N , P_{NEE} , P_{SEE} , P_S e P_E , podendo ocorrer o problema de "checkerboard". É reportado, no trabalho de Vanka et al. [16], que o uso desta configuração tem causado dificuldades na convergência da equação para correção da pressão, com a utilização do método de Patankar e Spalding [17].

A FIGURA 5 apresenta uma outra possibilidade de disposição das variáveis dependentes na malha, discutida por Maliska e Raithby [18].

Neste esquema apresentado na FIGURA 5, a pressão e as componentes da velocidade estão localizadas de uma maneira desencontrada na malha, mas existe um fraco acoplamento entre as pressões nos pontos P, E, N, W, S, etc. e as pressões nos pontos NE, SE, NW, SW, etc. A equação da conservação da massa, para o volume de controle centrado em P, depende somente das velocidades normais a suas faces que dependem, através da equação da conservação da quantidade de movimento, somente de P_E , P_W , P_N , P_S e P_P , quando a malha for ortogonal. Se estas pressões estiverem corretas, a conservação da massa para o volume de controle centrado em P será satisfeita mesmo que as pressões P_{NE} , P_{SE} , P_{SW} e P_{NW} estejam completamente incorretas. Estas últimas pressões serão verificadas pelo balanço de conservação da massa para o volume de controle centrado em SE. As duas distribuições de pressão estão fracamente acopladas através das condições de contorno.



- localização de P, ρ, μ, T , etc
- localização de u
- ↑ localização de v

FIGURA 5 - Arranjo das variáveis, discutido por Maliska e Raithby [18].

Outro tipo de malha desconstruída foi utilizado por Ramachandra e Spalding [19], em conjunto com coordenadas não ortogonais. A FIGURA 6 mostra a posição relativa dos pontos de velocidade e pressão.

O fluxo de massa através das faces do volume de controle, ilustrado na FIGURA 6, é obtido através de interpolação pois u e v não estão disponíveis nas posições desejadas. Na equação de conservação da massa, a componente da velocidade, que não esteja localizada onde necessária para o cálculo do fluxo de massa, terá que ser calculada pela média entre os quatro vizinhos, resultando em uma equação para correção da pressão envolvendo muitos pontos. Isto sugere que sérios problemas de convergência poderão ocorrer. Se, para evitar esta complexidade na equação, valores de u e v de iterações prévias

fossem usados, a equação da conservação da massa nunca seria exatamente satisfeita. Não há comentários, em [19], sobre como solucionar este problema.

Uma outra alternativa de disposição de variáveis na malha é localizar as componentes de velocidade no mesmo ponto, onde são necessárias para o cálculo do fluxo de massa, ou seja, no centro das quatro faces do volume de controle para massa. A pressão, temperatura e propriedades físicas são localizadas no centro do volume de controle, conforme mostra a FIGURA 7. Este arranjo foi adotado por Maliska e Raithby [18], permitindo que a equação de nove pontos para a correção da pressão se reduza à equação de cinco pontos, quando a malha for ortogonal.

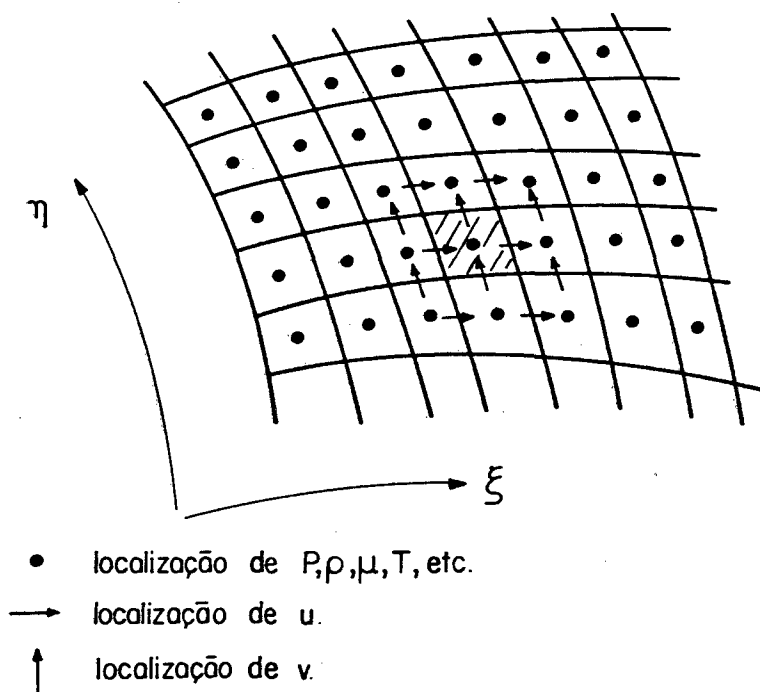


FIGURA 6 - Arranjo das variáveis dependentes na malha, adotado por Ramachandra e Spalding [19].

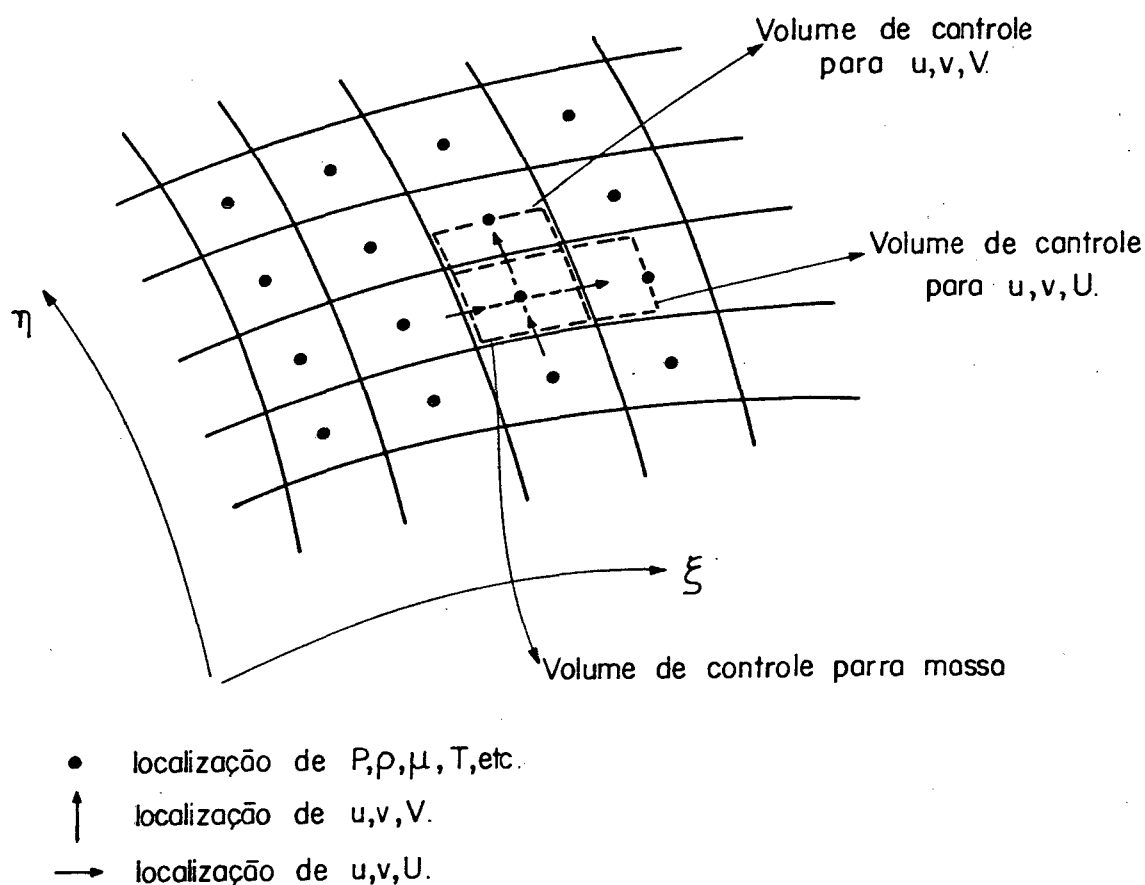


FIGURA 7 - Arranjo das variáveis dependentes na malha, adotado por Maliska e Raithby [18].

Este arranjo, ilustrado na FIGURA 7, não introduz média na pressão utilizada nos balanços de quantidade de movimento e elimina o perigo de ocorrer o campo oscilatório de pressão. Na equação para correção da pressão resultante, os pontos de pressão estão fortemente ligados com os quatro vizinhos paralelos e fracamente ligados com os vizinhos na diagonal. Neste caso, as componentes da velocidade, u e v , no centro de cada face do volume de controle, são dependentes dos seis pontos de pressão vizinhos, pela equação da conservação de

quantidade de movimento. A desvantagem que aparece neste esquema está na duplicação do número de incógnitas para as componentes do vetor velocidade.

Silva [10] propôs um arranjo para as variáveis na malha, semelhante ao esquema proposto por Maliska e Raithby [18], que elimina a duplicação do número de incógnitas para as componentes do vetor velocidade, ilustrado na FIGURA 8. Para o cálculo das componentes contravariantes da velocidade nas faces do volume de controle da massa, é utilizada a componente cartesiana da velocidade que se encontra armazenada em tal face, bem como, a outra componente cartesiana que é calculada através da média das velocidades vizinhas.

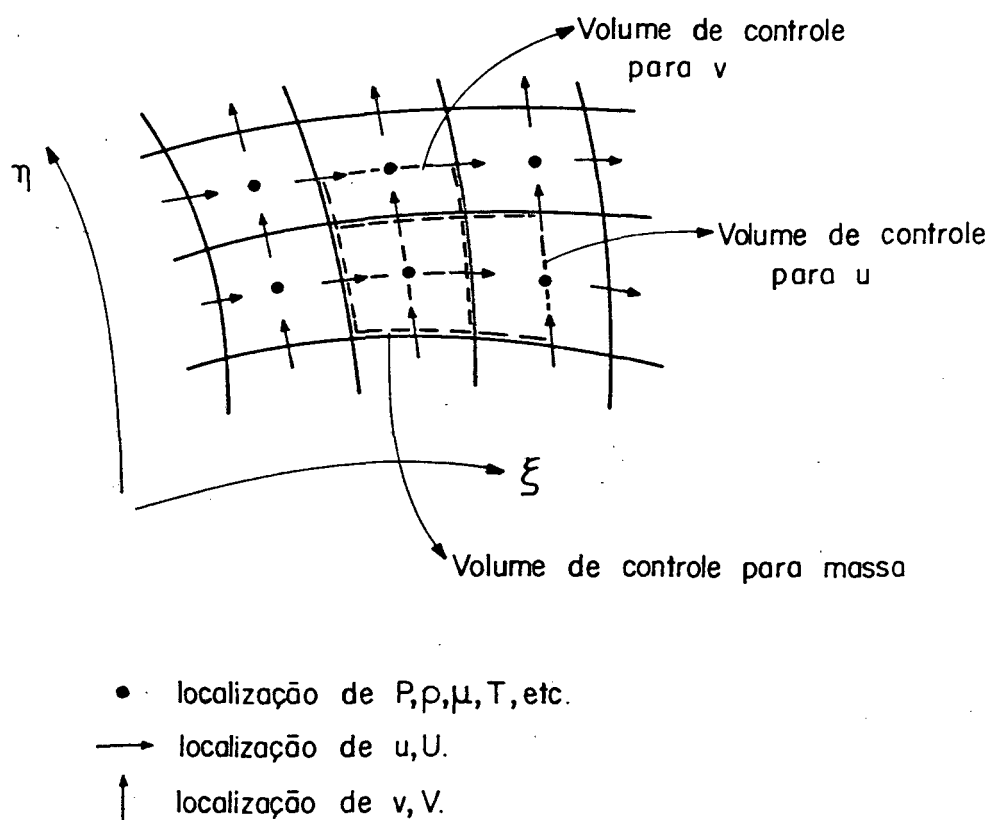


FIGURA 8 - Arranjo das variáveis na malha, adotado por Silva [10].

Em resumo, a grande desvantagem que aparece nos esquemas envolvendo variáveis desencontradas é a necessidade de utilização de diferentes volumes de controle para as variáveis dependentes do problema em questão, dificultando a implementação computacional. É conveniente, portanto, que seja utilizado um esquema com variáveis co-localizadas, de simples implementação e livre do problema de campo oscilatório de pressão, através do tratamento adequado do acoplamento pressão-velocidade, sendo este um dos principais objetivos deste trabalho.

2.2 - ANÁLISE DE ALGUNS ESQUEMAS QUE EMPREGAM DIFERENTES FUNÇÕES DE INTERPOLAÇÃO COM O ARRANJO DE VARIÁVEIS CO-LOCALIZADAS

Em 1981, Hsu [20], Prakash [21], Rhie [22] publicaram as primeiras aplicações do método de volumes finitos, para a solução de problemas de escoamento de fluidos, com coordenadas não ortogonais e com arranjo de variáveis co-localizadas. Estes trabalhos não foram muito difundidos, em virtude do arranjo de variáveis co-localizadas ser considerado impraticável, devido ao problema do campo oscilatório de pressão [2]. O interesse em utilizar o arranjo de variáveis co-localizadas cresceu lentamente, principalmente devido à complexidade encontrada na utilização do arranjo de variáveis desencontradas, para a solução de escoamentos tridimensionais, turbulentos, em geometrias arbitrárias. Diversos outros trabalhos, como Rhie e Chow [23], Rhie [24], Rhie et al. [25], Peric [26], Burns et al. [27], foram publicados utilizando esta configuração.

Recentemente, Baliga e Patankar [28] e Schneider e Zedan [29] aplicaram, no método de elementos finitos, os princípios de conservação em volumes de controle, sendo que os primeiros utilizaram elementos triangulares e os últimos, elementos quadriláteros. Para o transporte escalar, um novo esquema

"upwind" foi introduzido na formulação de elementos finitos por Schneider e Raw [30]. Nos trabalhos publicados por Schneider e Raw [31,32], foi proposta uma nova alternativa para avaliação da variável ϕ , na face dos volumes de controle, obtida a partir da própria equação que expressa a conservação da variável ϕ . Nestes trabalhos, mesmo no contexto de elementos finitos, foi garantida a conservação das variáveis relevantes do problema, a nível elementar.

No método de volumes finitos, Peric et al. [33], Camarero et al. [34], Schneider [35], Majumdar [36] e Marchi et al. [37] utilizaram o arranjo de variáveis co-localizadas, para a solução de problemas envolvendo escoamento de fluidos incompressíveis, sendo apresentadas diversas propostas para avaliação da variável ϕ e do fluxo de massa nas faces do volume de controle.

A seguir será apresentado um resumo dos principais esquemas encontrados na literatura, envolvendo variáveis co-localizadas, com diferentes funções de interpolação.

2.2.1 - Esquema proposto por Peric et al. [33]

Peric et al. [33] apresentam uma comparação detalhada entre dois métodos de solução, onde um deles emprega variáveis desencontradas e, o outro, variáveis co-localizadas. A formulação proposta admite escoamento laminar, bidimensional, de um fluido newtoniano, incompressível, em regime permanente.

As equações são discretizadas, empregando-se o método de volumes finitos. Utilizando-se a FIGURA 9, pode escrever-se a equação da conservação de quantidade de movimento na direção x discretizada resultante como

$$a_{PP} u_P = \sum_{nb} a_{nb} u_{NB} + (1 - \alpha_u) a_{PP} u_P^0 - \Delta y_P (P_e - P_w) \quad (1)$$

onde o subscrito NB representa todos os pontos vizinhos E, W, N, S, etc. O fator α_u é um parâmetro de subrelaxação, necessário para estabilidade. A

quantidade u_p^0 indica que os valores de u_p devem ser obtidos da iteração anterior.

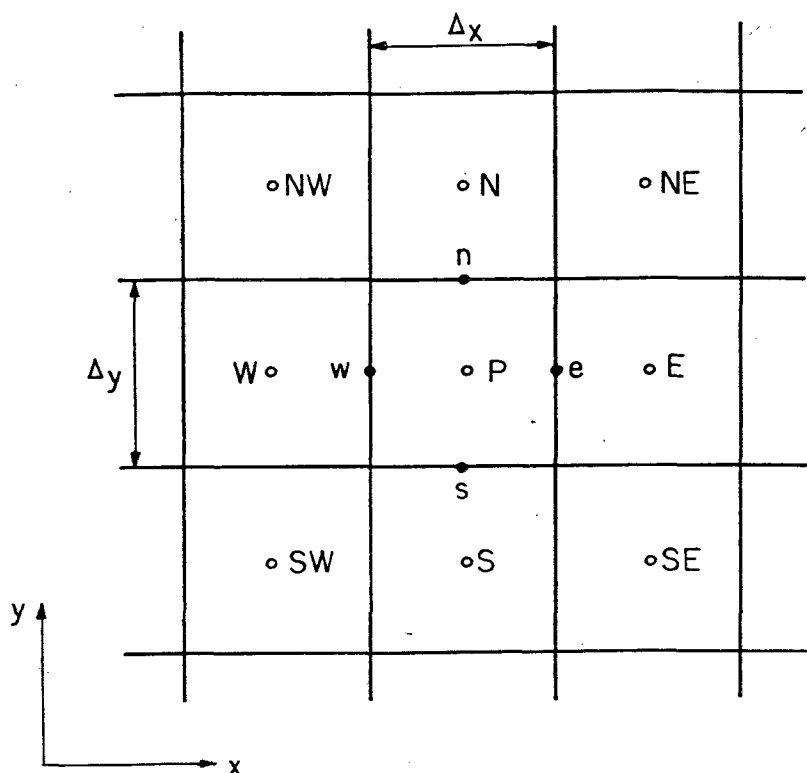


FIGURA 9 - Arranjo de variáveis co-localizadas.

O cálculo dos fluxos convectivos é efetuado aplicando-se linearização, onde os fluxos mássicos são tomados da iteração anterior. Por simplicidade e estabilidade, o esquema "upwind" é utilizado para avaliação das velocidades nas faces dos volumes de controle, nos dois métodos. Os fluxos difusivos e os gradientes de pressão, nas equações do movimento, são avaliados através da aproximação por diferença central. A pressão é armazenada nas faces dos volumes de controle, no caso do arranjo de variáveis desencontradas, facilitando o

cálculo do gradiente de pressão. Para o arranjo de variáveis co-localizadas, as pressões são calculadas através de interpolação linear. Para obtenção dos campos de velocidade e pressão, que satisfaçam os princípios de conservação da massa e quantidade de movimento, simultaneamente, é utilizado o método SIMPLE (Patankar e Spalding [17]).

No arranjo de variáveis co-localizadas, as componentes de velocidade nas faces do volume de controle, necessárias na equação da conservação da massa, precisam ser interpoladas a partir dos valores de pontos vizinhos. Esta interpolação é crucial para o sucesso do método utilizando variáveis co-localizadas. A prática adotada por Peric et al. [33], para cálculo das velocidades nas faces do volume de controle, será descrita para a velocidade localizada na face leste, u_e . As equações discretizadas da conservação de quantidade de movimento na direção x , para os pontos P e E , ilustrados na FIGURA 9, podem ser escritas como

$$u_P = \left[\frac{\sum_{nb} a_{nb} u_{NB} + (1-\alpha_u) a_P u_P^0 - \Delta y_P (P_e - P_w)}{a_P} \right]_P \quad (2)$$

$$u_E = \left[\frac{\sum_{nb} a_{nb} u_{NB} + (1-\alpha_u) a_P u_P^0 - \Delta y_P (P_e - P_w)}{a_P} \right]_E \quad (3)$$

O valor da velocidade na face da célula, u_e , é obtido por interpolação linear entre os termos das equações (2) e (3), com exceção da diferença de pressão, que é calculada semelhante à formulação com variáveis desencontradas, resultando na seguinte equação:

$$u_e = \left[\frac{\sum_{nb} a_{nb} u_{NB} + (1-\alpha_u) a_P u_P^0}{a_P} \right]_e - \left[\frac{1}{a_P} \right]_e \Delta y_e (P_E - P_P) \quad (4)$$

onde a barra superior indica interpolação linear.

Um resultado importante é que a velocidade na face da célula depende dos valores da pressão nos dois pontos vizinhos, que é a base da formulação com variáveis desencontradas. O método baseado no arranjo de variáveis co-localizadas utiliza indiretamente a mesma idéia do arranjo com variáveis desencontradas, permitindo o uso do mesmo algoritmo para tratamento do acoplamento pressão-velocidade, nos dois métodos.

Para garantir a conservação da massa, correções para velocidade e pressão são introduzidas através da seguinte equação:

$$u'_e = - \left[\frac{1}{a_p} \right]_e \Delta y_e (P'_E - P'_P) \quad (5)$$

Estas equações são derivadas de maneira idêntica à utilizada em malhas com variáveis desencontradas, apresentando a única diferença no cálculo do termo $(1/a_p)$, na interface, que agora é obtido por interpolação linear, enquanto que, no arranjo de variáveis desencontradas, este termo é disponível na interface. O número de iterações necessárias para convergência, o esforço computacional por iteração, o tempo computacional total são praticamente idênticos para ambos métodos de solução. O método que utiliza o arranjo de variáveis co-localizadas, conforme relata Peric et al. [33], não apresenta qualquer desvantagem quando comparado ao método baseado no arranjo de variáveis desencontradas. Além disto, o tratamento das condições de contorno e a implementação de esquemas de interpolação mais complexos resultam mais simples quando o arranjo de variáveis co-localizadas é utilizado.

Convém salientar que, neste esquema proposto por Peric et al. [33], é utilizada a aproximação por diferença central, para cálculo dos gradientes de pressão, sendo que as pressões nas faces dos volumes de controle são obtidas por interpolação linear. Além disto, a equação utilizada para obtenção das

componentes de velocidade, na face do volume de controle, é obtida através de uma interpolação linear entre as equações que expressam a conservação da quantidade de movimento, nos dois pontos vizinhos à face, apresentando um tratamento especial para o termo que contém a pressão.

Marchi et al. [37] implementaram a formulação proposta por Peric et al. [33], com variáveis co-localizadas, bem como apresentaram uma nova maneira para obtenção dos coeficientes da equação para avaliação da variável ϕ na face do volume de controle. Na solução de alguns problemas bidimensionais, o desempenho dos métodos co-localizado e desencontrado foi comparável. Marchi et al. [38] apresentam a solução de alguns problemas supersônicos, utilizando o arranjo de variáveis co-localizadas.

2.2.2 - Esquema proposto por Camarero et al. [34]

Camarero et al. [34] propuseram um esquema que utiliza variáveis co-localizadas, em geometrias arbitrárias. Para evitar o problema do campo oscilatório de pressão que pode ocorrer em tal discretização, foi proposto um esquema de diferença para frente e para trás, para avaliação, na direção ξ , dos fluxos mássicos e gradientes de pressão, respectivamente, bem como um entrelaçamento de malha na direção η , conforme ilustra a FIGURA 10.

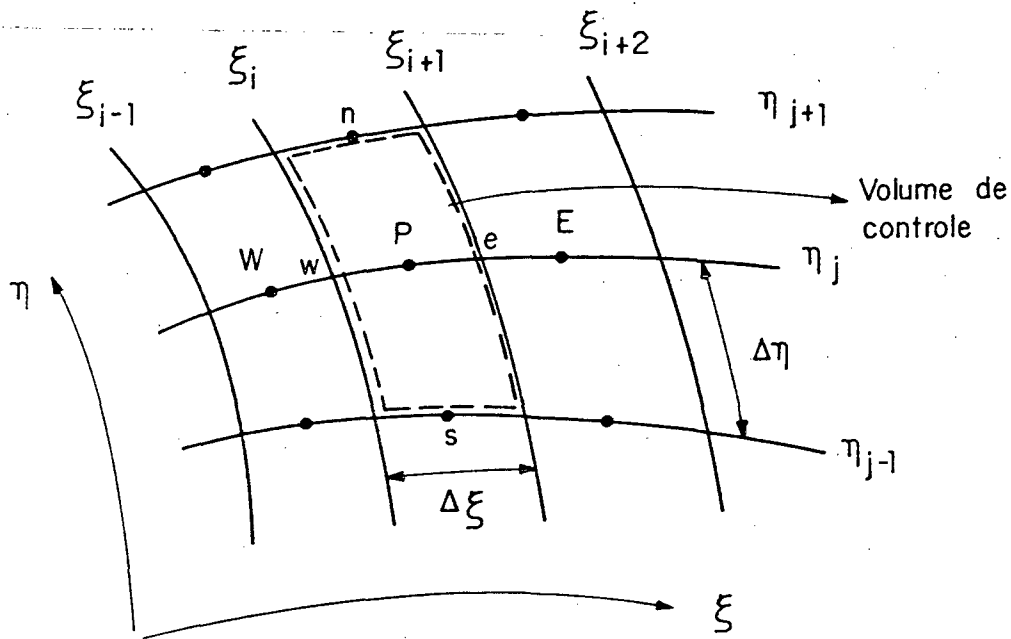
Nesta estrutura ilustrada na FIGURA 10, a pressão e as componentes de velocidade são armazenadas no centro P do volume de controle, que possui largura unitária na direção ξ , e duas vezes a unidade, na outra direção. Diferenças centrais são utilizadas para calcular os gradientes de pressão na direção η . Os valores da velocidade nas faces n e s são calculados utilizando-se o entrelaçamento dos volumes de controle nesta direção, uma vez que estas faces são os centros dos volumes adjacentes. A pressão nas faces n e s é obtida por simples média entre os dois pontos vizinhos na mesma direção. Na direção ξ , não é utilizado nenhum entrelaçamento ou média. As vazões mássicas

são obtidas por diferença para frente, de maneira que o fluxo de massa através da face e é controlado pela velocidade no ponto P do volume de controle. Gradientes de pressão são calculados por diferença para trás, isto é, a pressão localizada no centro P do volume de controle atua sobre a face w . Esta estrutura permite o uso do mesmo volume de controle para os balanços de massa e quantidade de movimento e, ainda, o armazenamento de pressão e componentes de velocidade na mesma localização na malha.

A equação da conservação da quantidade de movimento envolve as componentes de velocidade cartesianas e contravariantes, enquanto que a equação da conservação da massa depende somente das componentes contravariantes U e V , localizadas no centro das faces w , e , s , n do volume de controle, conforme ilustra a FIGURA 10. As componentes contravariantes, U e V , necessárias para o cálculo dos fluxos mássicos, são calculadas a partir das componentes cartesianas, u e v , que são obtidas pela solução da equação da conservação da quantidade de movimento, e são armazenadas no centro P do volume de controle de vértices $(i, j-1)$, $(i+1, j-1)$, $(i+1, j+1)$, $(i, j+1)$, conforme mostra a FIGURA 10. Entretanto, como resultado do esquema de entrelaçamento na direção η , estas componentes de velocidade são também conhecidas no centro da face, ou seja, no ponto $(i+1/2, j+1)$, pois corresponde ao centro do volume de controle com vértices (i, j) , $(i+1, j)$, $(i+1, j+2)$ e $(i, j+2)$. Desta forma, as componentes cartesianas de velocidade são conhecidas em todos os níveis j , apresentados na FIGURA 10, e as componentes V , nas faces n e s , são obtidas a partir da equação (6),

$$V_{n,s} = \frac{u_{n,s}(\eta_x)_{n,s}}{J_{n,s}} + \frac{v_{n,s}(\eta_y)_{n,s}}{J_{n,s}} \quad (6)$$

onde η_x e η_y são métricas da transformação.



- localização de $P, u, v, T, \rho, \mu, \text{etc.}$

FIGURA 10 - Malha computacional proposta por Camarero et al. [34].

O cálculo das componentes U em w e e requer um tratamento especial pois as componentes cartesianas não estão disponíveis em tais posições, podendo ser obtidas através das equações (7) e (8), que utilizam o esquema de diferença para frente, dadas por

$$U_w = \frac{u_w(\xi_x)_w}{J_w} + \frac{v_w(\xi_y)_w}{J_w} \quad (7)$$

$$U_e = \frac{u_P(\xi_x)_e}{J_e} + \frac{v_P(\xi_y)_e}{J_e} \quad (8)$$

onde ξ_x e ξ_y são métricas da transformação.

A forma discretizada da equação de conservação de quantidade de

movimento requer a avaliação da variável ϕ e de suas derivadas nas faces do volume de controle. Estes termos podem ser calculados pelo esquema ponderado, proposto por Raithby e Torrance [13].

Um aspecto característico da formulação incompressível é a obtenção do campo de pressão responsável pelas velocidades que satisfazem a conservação da massa e quantidade de movimento, simultaneamente. O tratamento deste acoplamento é feito através de uma formulação semelhante ao método SIMPLE, modificado para malhas curvilíneas, onde as equações da conservação da massa e quantidade de movimento são combinadas.

A equação resultante, para correção da velocidade, é dada por

$$u'_P = \frac{\Delta t J_P}{\rho_P} \left\{ \frac{P'_P (\xi_x/J)_w}{\Delta \xi} - \frac{P'_E (\xi_x/J)_e}{\Delta \xi} - \frac{P'_n (\eta_x/J)_n}{2\Delta \eta} + \frac{P'_s (\eta_x/J)_s}{2\Delta \eta} \right\} \quad (9)$$

onde (') indica a correção da variável em questão e J é o jacobiano da transformação dado por

$$J = \xi_x \eta_y - \eta_x \xi_y \quad (10)$$

A equação (9) envolve os seguintes pontos: $(i+1/2, j)$, $(i+3/2, j)$, $(i+1/2, j+1)$ e $(i+1/2, j-1)$, ou seja, P, E, n, s. A equação para correção da pressão, obtida pelo método SIMPLE, envolve nove pontos de pressão. Entretanto, se somente a correção de pressão no centro do volume de controle $(i+1/2, j)$ for levada em conta, desprezando-se o efeito das pressões vizinhas, obtém-se uma equação explícita para correção da pressão.

Apesar do esquema proposto por Camarero et al. [34] apresentar uma grande economia de memória computacional, bem como, ser um esquema de solução rápida, em virtude da equação para correção da pressão ser uma equação explícita, apresenta o inconveniente de utilizar um gradiente de pressão

inadequado, na direção ξ , na equação da conservação da quantidade de movimento, em virtude do esquema proposto de diferença para trás para cálculo do gradiente de pressão. Além disto, em virtude do entrelaçamento de malhas proposto, na direção η , o balanço das quantidades conservadas nesta direção é efetuado em uma malha menos refinada sendo realizado duas vezes em todo domínio de cálculo.

2.2.3 - Esquema proposto por Schneider [35]

O esquema proposto por Schneider [35] é baseado na conservação a nível de volumes elementares. As equações governantes para conservação da quantidade de movimento e massa são expressas em termos dos fluxos nas faces dos volumes de controle. Para determinação das variáveis transportadas em tais faces, um fechamento é requerido e é efetuado através de uma aproximação das equações governantes. Neste esquema, todas as variáveis estão localizadas no mesmo ponto, ou seja, no centro de um único volume de controle. Para obtenção dos termos convectivos, é necessário o conhecimento das variáveis nas faces do volume de controle, sendo os fluxos mássicos assumidos conhecidos da iteração anterior, para linearização.

Schneider [35] propõe a utilização da seguinte equação, para avaliação das variáveis nas faces do volume de controle:

$$\rho u \frac{d\phi}{dx} - \Gamma \phi \frac{d^2\phi}{dx^2} - B = 0 \quad (11)$$

onde B é o termo fonte volumétrico equivalente para a variável ϕ .

A equação (11) descreve a conservação da variável ϕ , em regime permanente, sendo localmente unidimensional, com o termo B representando o termo fonte real para ϕ , ou pode ser considerada uma equação bidimensional ou tridimensional completa que descreve a conservação da variável ϕ , sendo que os termos, que não aparecem na equação, estão incorporados no termo fonte efetivo,

B. É notado que, no caso da conservação da quantidade de movimento, o termo fonte B conterá os gradientes de pressão nas direções x ou y . Esta inclusão da componente do gradiente de pressão no termo B fornece o necessário acoplamento entre a velocidade e pressão, que é essencial para o sucesso do esquema. A solução da equação (11) pode ser obtida analiticamente, considerando-se o termo B constante. De posse desta solução, é possível obter-se uma expressão para a avaliação da variável na face leste do volume de controle, ilustrado na FIGURA 9, que é dada pela equação (12), como

$$\phi_e = CW \phi_p + CE \phi_E + \frac{DE B \Delta x^2}{\Gamma \phi} \quad (12)$$

onde,

$$CW = \left\{ \frac{e^{Pe} - e^{Pe/2}}{e^{Pe} - 1} \right\} \quad (13)$$

$$CE = \left\{ \frac{e^{Pe/2} - 1}{e^{Pe} - 1} \right\} \quad (14)$$

$$DE = \frac{1}{Pe} \left\{ \frac{1}{2} - \frac{e^{Pe/2} - 1}{e^{Pe} - 1} \right\} \quad (15)$$

$$Pe = \frac{\rho u \Delta x}{\Gamma \phi} \quad (16)$$

$$\Delta x = x_E - x_P \quad (17)$$

O passo final para o fechamento é especificar o termo fonte equivalente, B. Para o caso específico da equação da conservação de quantidade de movimento na direção x , o termo fonte será dado por

$$B = - \frac{\partial P}{\partial x} + \Gamma \phi \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + S^u \quad (18)$$

o qual contém o gradiente de pressão, a difusão lateral, isto é, na direção y , e o termo fonte volumétrico propriamente dito, que em muitas aplicações pode conter termos de empuxo. A convecção lateral, isto é, na direção y , foi omitida do termo fonte equivalente, pois a inclusão deste termo pode gerar um sistema de equações algébricas, depois da aplicação do fechamento nas equações dos volumes de controle, não diagonalmente dominante. Os efeitos do acoplamento já estão incorporados através da inclusão da componente do gradiente de pressão.

Substituindo-se o termo fonte equivalente, dado pela equação (18), na equação (12), considerando-se o arranjo ilustrado na FIGURA 9, obtém-se a equação de fechamento

$$\begin{aligned}
 u_e = & \frac{CE}{(1 + DE A_2 \Delta x^2)} u_E + \frac{CW}{(1 + DE A_2 \Delta x^2)} u_P + \\
 & + \frac{DE \Delta x (P_P - P_E)}{\Gamma^\phi (1 + DE A_2 \Delta x^2)} + \frac{DE \Delta x^2}{\Gamma^\phi (1 + DE A_2 \Delta x^2)} S^u + \\
 & + \frac{DE A_1 \Delta x^2}{(1 + DE A_2 \Delta x^2)} u_{eN} + \frac{DE A_3 \Delta x^2}{(1 + DE A_2 \Delta x^2)} u_{eS}
 \end{aligned} \tag{19}$$

onde

$$A_1 = \frac{2}{(\Delta y_n + \Delta y_s) \Delta y_n} \tag{20}$$

$$A_3 = \frac{2}{(\Delta y_n + \Delta y_s) \Delta y_s} \tag{21}$$

$$A_2 = A_1 + A_3 \tag{22}$$

Os termos u_{eN} e u_{eS} devem ser calculados na face leste do volume de controle centrado em N e S, respectivamente e serão tomados como uma média ponderada entre u_N e u_{NE} , e u_S e u_{SE} , conforme o caso. Determinando-se o limite

da equação (19), para os casos de $Pe \rightarrow \infty$ e $Pe \rightarrow 0$, que correspondem à situação de convecção pura e difusão pura, respectivamente, obtém-se

$$u_e (P_e \rightarrow \infty) \longrightarrow u_p \quad (23)$$

$$u_e (P_e \rightarrow 0) \longrightarrow \frac{u_E + u_P}{2} \quad (24)$$

Desta forma, as velocidades nas faces dos volumes de controle são calculadas em função do termo fonte e das velocidades e pressão armazenadas nos centros dos volumes de controle vizinhos.

Quando a equação da conservação de quantidade de movimento está envolvida, aparece duas vezes a pressão, sendo uma, como termo fonte da equação da conservação da quantidade de movimento e a outra, na equação para avaliação das variáveis nas faces do volume de controle, onde a diferença de pressão local influencia diretamente o valor da velocidade através da respectiva face.

A equação da conservação da massa utiliza as velocidades obtidas com a equação (19), já discutida, sendo que conterà referência às velocidades e pressões localizadas nos pontos vizinhos e fornecerá velocidades nas faces do volume de controle que exatamente conservam a massa. Substituindo-se a equação (19) na equação da conservação da massa, obtém-se uma equação com nove pontos de pressão, sendo diagonalmente dominante. A presença da pressão na equação da conservação da massa é, portanto, via funções de interpolação e não através de equações de correção de velocidade.

Um importante aspecto a ser considerado neste esquema de discretização é a implementação das condições de contorno. No esquema proposto por Schneider [35], duas condições de contorno são aplicadas em todos os pontos da fronteira. Não são utilizados pontos fictícios. Um volume de controle com espessura zero está associado a cada ponto do contorno. A FIGURA 11 ilustra uma fronteira

do domínio, sendo que o subscrito b denota o contorno.

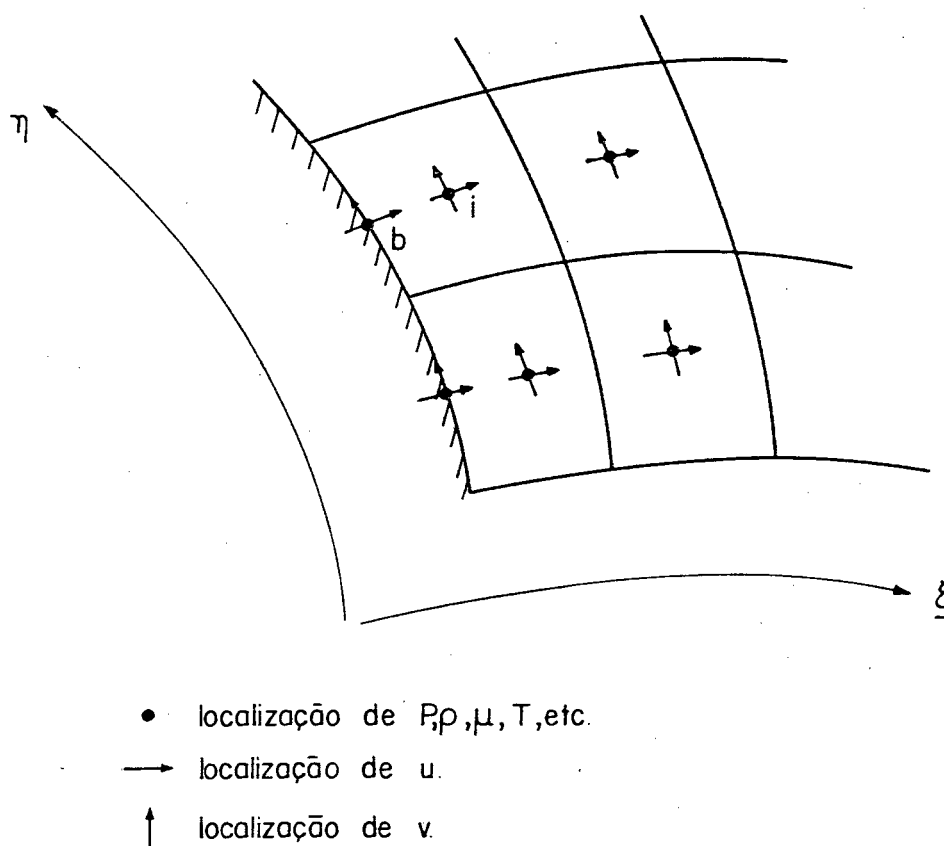


FIGURA 11 - Volume de controle do contorno utilizado no esquema proposto por Schneider [35].

A difusão no volume de controle, ilustrado na FIGURA 11, é calculada de maneira idêntica à realizada no interior, utilizando-se o fato que $\Delta x_b = 0$. Para o fluxo que está sendo transportado, a velocidade real no ponto do contorno, quando prescrita nesta posição, é empregada, com os coeficientes unitários ou nulos.

As equações que aplicam as condições de contorno para o ponto mostrado na FIGURA 11 são dadas por

$$A^u u_b + B^u u_p + C^u P_b = D^u \quad (25)$$

$$A^v v_b + B^v v_p + C^v P_b = D^v \quad (26)$$

É notado que a presença da pressão nestas equações permite que uma destas equações seja utilizada para especificar a mesma, se desejado. No contorno, entretanto, cada ponto tem associadas a pressão e duas componentes de velocidade, sendo requerida uma terceira equação.

A terceira equação é obtida realizando-se um balanço de massa em um quarto do volume de controle no contorno, conforme mostra a FIGURA 12, sendo que as velocidades nas faces n e s são desprezadas. O fluxo de massa que entra é calculado utilizando-se a velocidade no ponto b, enquanto que o fluxo de massa que sai é obtido através da expressão para a velocidade na face do volume de controle, equação (19) e, desta forma, a expressão para a velocidade na face do volume de controle é igualada à velocidade no ponto do contorno, b. A equação resultante contém as pressões e velocidades localizadas nos pontos vizinhos.

Schneider [35] apresenta a solução de dois problemas. No caso da cavidade quadrada, para alto número de Reynolds, o erro excede 50% do valor obtido com uma malha extremamente fina. Schneider [35] esclarece que tais níveis de difusão numérica também são alcançados quando é utilizado o arranjo de variáveis desencontradas. O erro obtido, provavelmente, é consequência da função de interpolação unidimensional empregada, onde a convecção lateral foi desprezada e não do tipo de arranjo de variáveis utilizado.

Uma extensão possível do trabalho apresentado por Schneider [35] é a introdução do termo de convecção lateral, na equação que é utilizada para obtenção do valor da variável na face do volume de controle, com o objetivo de minimizar os erros de difusão numérica.

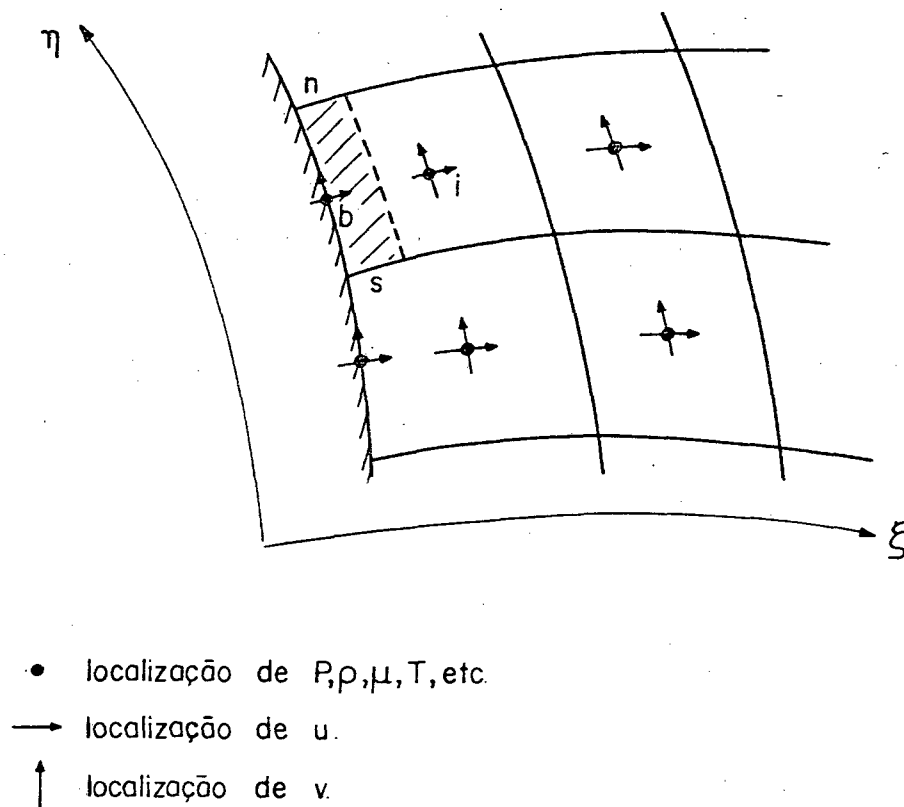


FIGURA 12 - Velocidade na face do volume de controle do contorno, no esquema proposto por Schneider [35].

2.2.4 - Esquema proposto por Majumdar [36]

Majumdar [36], baseando-se nos trabalhos apresentados por Rhie [22] e Peric [26], seguiu o mesmo princípio de interpolação da equação da conservação de quantidade de movimento. Uma importante observação, feita durante os testes realizados por Majumdar [36], nunca comentada por Rhie [22] ou Peric [26], é que a solução final, obtida para cada condição de escoamento, depende de um parâmetro de relaxação usado para velocidade. Tal dependência deste parâmetro é uma característica indesejável ao método.

Majumdar [36] propõe uma maneira diferente para implementação da interpolação da equação da conservação da quantidade de movimento, em um

algoritmo iterativo, para obtenção de uma única solução independente do fator de relaxação utilizado. Por razões de estabilidade, é incorporado um parâmetro de relaxação para atualização das velocidades no centro da célula, obtidas da equação da conservação da quantidade de movimento, equação (2), por exemplo, para o ponto P, da FIGURA 9.

É proposta uma interpolação linear entre o valor obtido pela equação (2), com $\alpha_u = 1$, e o valor obtido na iteração anterior, que pode ser expressa pela equação (27), dada por

$$u_P = \alpha_u \left[H_P + \frac{A_{y_P}}{a_P} (P_w - P_e) \right] + (1 - \alpha_u) u_P^0 \quad (27)$$

onde α_u é um parâmetro de relaxação e,

$$H_P = \frac{\sum_{nb} a_{nb} u_{NB}}{a_P} \quad (28)$$

A utilização do conceito de interpolação da equação da conservação de quantidade de movimento, estabelecido por Peric et al. [33], fornece a seguinte equação para avaliação da velocidade na face do volume de controle, baseada na equação (27):

$$u_e = \alpha_u \left\{ \bar{H} + \Delta y_e \left[\frac{1}{a_P} \right]_e (P_P - P_E) \right\} + (1 - \alpha_u) \bar{u}^0 \quad (29)$$

onde \bar{H} e \bar{u}^0 são interpolação linear entre as grandezas H_P e H_E , u_P^0 e u_E^0 , respectivamente.

Esta equação (29) mostra que a velocidade na face do volume de controle é calculada através de uma fração α_u do valor resultante da interpolação da equação da conservação da quantidade de movimento e de uma

fração $(1 - \alpha_u)$ do valor obtido da interpolação linear entre as velocidades na iteração anterior.

Uma outra maneira de se obter uma expressão, para avaliação da velocidade nas faces do volume de controle, é a utilização de um tratamento análogo ao das velocidades no centro do volume de controle, de maneira que o valor de u_e , obtido na iteração anterior, é utilizado, com um fator de relaxação, para a obtenção do valor de u_e , ou seja,

$$u_e = \alpha_u \left\{ \bar{H} + \Delta y_e \left[\frac{1}{a_p} \right]_e (P_P - P_E) \right\} + (1 - \alpha_u) u_e^0 \quad (30)$$

onde u_e^0 é o valor de u_e obtido na iteração anterior.

Após vários testes realizados para obtenção da solução de diferentes problemas, Majumdar [36] observou que o uso da equação (29) fornece diferentes resultados para diferentes parâmetros de relaxação, enquanto que o uso da equação (30) fornece um único valor de solução, independente do parâmetro de relaxação utilizado, sem qualquer aumento significativo de custo computacional, comparado com o da utilização da equação (29). Os resultados mostram que, para todas as diferentes malhas empregadas, a diferença nos resultados, devido à utilização das equações (29) e (30), diminui quando o parâmetro de relaxação aumenta. Esta tendência pode ser facilmente explicada a partir da análise do lado direito das equações (29) e (30), onde estas equações se igualam, quando α_u tende à unidade. Para um dado parâmetro de relaxação, entretanto, não existe nenhuma conclusão definida a respeito do efeito do tipo de malha sobre o erro máximo relativo, pois estes efeitos parecem ser dependentes do problema.

A precisão da solução, analisada pela comparação com resultados analíticos, não é discutida neste trabalho de Majumdar [36]. A contribuição do trabalho de Majumdar [36] é a análise do fator de relaxação introduzido na interpolação da equação da conservação de quantidade de movimento, e a

proposição de uma equação de interpolação, cujos resultados independem do fator de relaxação utilizado.

2.2.5 - Esquema proposto por Schneider e Raw [31,32]

Uma nova formulação, para predição de problemas de escoamento de fluidos incompressíveis, foi proposta por Schneider e Raw [31]. A formulação retém a flexibilidade geométrica do método de elementos finitos e deriva as equações algébricas discretas utilizando balanços de conservação aplicados a volumes de controle distribuídos por todo o domínio. Um novo método de fechamento, para relacionar os valores das variáveis nas faces do volume de controle com os valores das variáveis nos pontos (centro do volume de controle), é introduzido, sendo que uma equação discreta, análoga à equação diferencial governante, é escrita para as variáveis nas faces do volume de controle.

A formulação proposta por Schneider e Raw [31] utiliza variáveis co-localizadas e supera o problema de campo oscilatório de pressão. A formulação é introduzida para a configuração de elementos quadriláteros e emprega um esquema "*skew upwind*", de alta precisão, para avaliação do termo convectivo. A FIGURA 13 mostra um volume de controle típico ao redor de um ponto em particular. Cada elemento contém quatro quadrantes, denominados subvolumes, cada um pertencente a um volume de controle diferente, conforme ilustra a FIGURA 13. Cada volume de controle é definido por oito segmentos de linha, sendo que cada dois segmentos pertencem a um dos subvolumes de controle. A discretização das equações governantes requer que diversas integrações sejam realizadas sobre a superfície do volume de controle. Tais integrações serão aproximadas no centro de cada segmento de linha, sendo estes pontos denominados pontos de integração, conforme mostra a FIGURA 13.

A premissa básica da formulação proposta por Schneider e Raw [31] é a

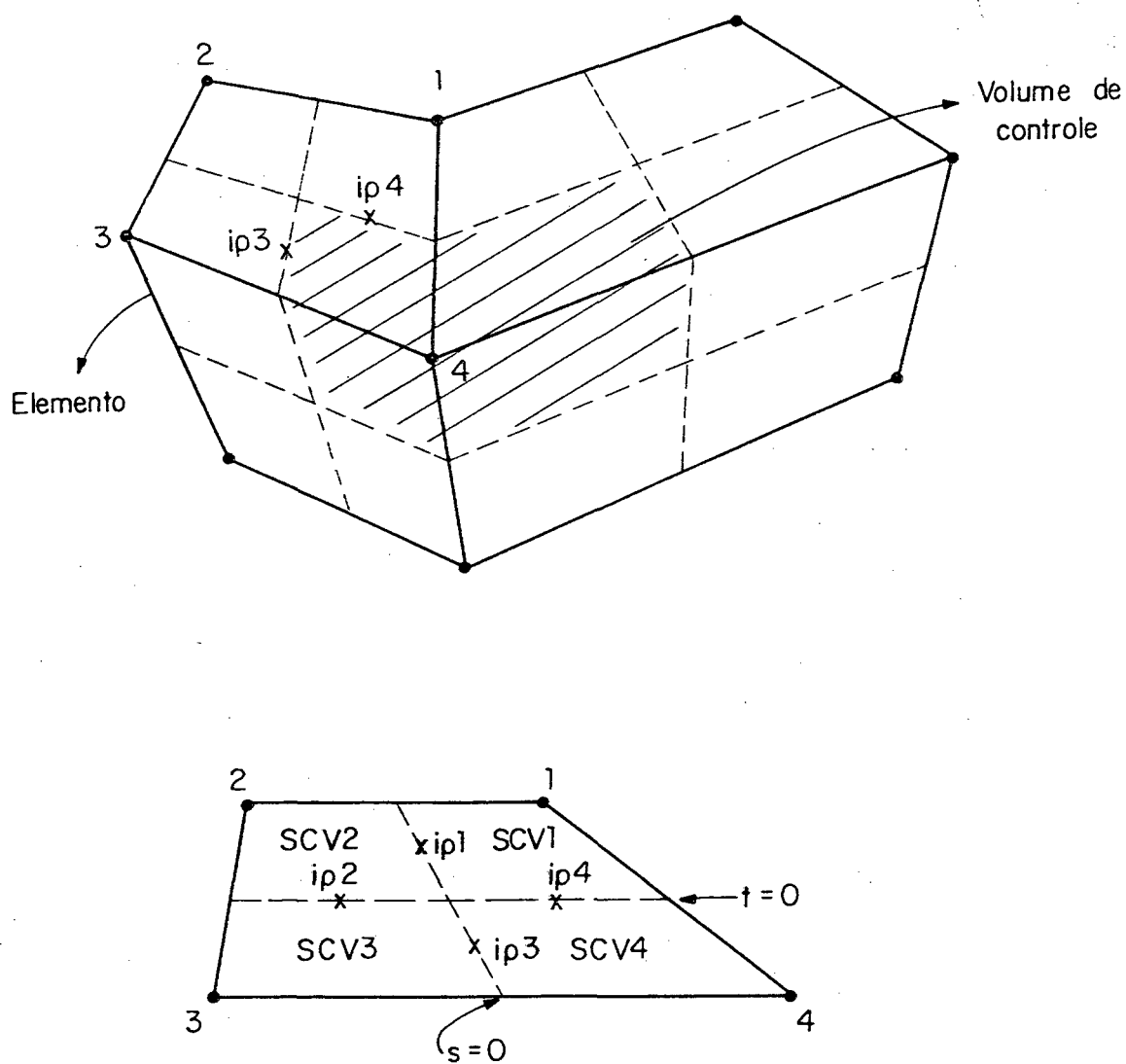
aplicação dos princípios de conservação para cada volume de controle. As equações algébricas resultantes expressam o balanço dos fluxos difusivos e convectivos, incluindo-se os termos fonte e transiente, quando estiverem presentes.

Para o fechamento do esquema proposto, é necessária a determinação das variáveis nos pontos de integração dos volumes de controle, em função dos valores das variáveis nos vértices do elemento.

A utilização da série de Taylor para avaliação das variáveis nas faces do volume de controle leva a oscilações na solução, quando altos números de Peclet estão envolvidos. A eliminação desta dificuldade pode ser alcançada através do uso de esquemas híbridos, nos quais a influência das características do escoamento é considerada. Entretanto, tais esquemas tem levado à excessiva falsa difusão, sendo que a precisão da solução se torna ameaçada. Isto é resultado da inclusão de apenas uma parte das influências físicas que afetam o valor das variáveis nas faces do volume de controle.

A formulação proposta por Schneider e Raw [31] inclui todas as influências físicas relevantes que podem afetar as variáveis nos pontos de integração. Como o efeito do gradiente de pressão local sobre as velocidades nos pontos de integração é incluído, nenhum desacoplamento não físico do campo de pressão, que ocorre nas formulações convencionais que utilizam variáveis colocalizadas, poderá acontecer. Considerando-se que todos os termos importantes, incluindo-se os termos fonte e transiente, da equação de conservação, possuem o efeito apropriado sobre as variáveis nos pontos de integração, a modelagem da convecção é mais precisa e, idealmente, livre de falsa difusão. Para cada variável, no ponto de integração, é gerada uma equação algébrica apropriada que inclui todos os efeitos físicos e acoplamentos relevantes.

Para determinação da pressão nos pontos de integração, nenhuma equação avalia melhor que as próprias equações de transporte, que expressam a



- localização de P, u, v, p, μ, T , etc.

FIGURA 13 - Pontos de integração, elemento e volume de controle com quatro subvolumes de controle, do esquema adotado por Schneider e Raw [31].

conservação das grandezas. Segundo Schneider e Raw [39], através da análise das equações diferenciais acopladas que descrevem o escoamento de fluidos incompressíveis, conclui-se que a pressão é uma variável fortemente elíptica. Desta forma, as pressões nos pontos de integração do volume de controle são aproximadas por interpolação linear entre as pressões localizadas nos centros do volume de controle.

Para avaliação das velocidades nas faces do volume de controle, é feita uma aproximação das equações governantes, escritas para cada ponto de integração. A equação da conservação da quantidade de movimento na direção i pode ser escrita como

$$\rho \left. \frac{\partial u_i}{\partial t} \right|_{ipi} + \rho u_j \left. \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right|_{ipi} + \left. \frac{\partial P}{\partial x_i} \right|_{ipi} - \mu \nabla^2 u_i \left|_{ipi} = S^u_i \right|_{ipi} \quad (31)$$

onde ipi denota um ponto de integração.

Utilizando-se a coordenada ao longo da linha de corrente, s , onde,

$$ds = \frac{u}{|\vec{V}|} dx + \frac{v}{|\vec{V}|} dy \quad (32)$$

que tem a direção coincidente com a direção do escoamento do fluido, pode escrever-se a equação (31) da seguinte forma:

$$\rho \left. \frac{\partial u_i}{\partial t} \right|_{ipi} + \rho |\vec{V}| \left. \frac{\partial u_i}{\partial s} \right|_{ipi} + \left. \frac{\partial P}{\partial x_i} \right|_{ipi} - \mu \nabla^2 u_i \left|_{ipi} = S^u_i \right|_{ipi} \quad (33)$$

onde

$$|\vec{V}| = (u^2 + v^2)^{1/2} \quad (34)$$

Cada termo da equação (33) requer uma aproximação para composição da

equação para o ponto de integração. O termo transiente é aproximado por

$$\rho \left. \frac{\partial u_i}{\partial t} \right|_{ip_i} = \rho \frac{u_i - u_i^0}{\Delta t} \Big|_{ip_i} \quad (35)$$

onde (⁰) denota valores obtidos na iteração anterior. Isto requer que valores antigos das variáveis dependentes nos pontos de integração sejam armazenados. O termo fonte é avaliado na posição do ponto de integração. O gradiente de pressão, cuja representação é essencial ao problema, para fornecer o necessário acoplamento pressão-velocidade, não apresenta dificuldades. Funções de interpolação são utilizadas de maneira que,

$$\left. \frac{\partial P}{\partial x} \right|_{ip_i} \approx \sum_{j=1}^4 \left. \frac{\partial N_j}{\partial x} \right|_{ip_i} P_j \quad (36)$$

onde as derivadas da função de interpolação são calculadas nos correspondentes pontos de integração. A aproximação do termo difusivo representa a contribuição mais fraca para formar a equação do ponto de integração. Isto se deve ao fato de que, com somente os quatro valores nos centros dos volumes de controle, ilustrados na FIGURA 13, e com o valor no ponto de integração em análise, a precisão da representação do laplaceano fica prejudicada. Isto não é tão severo, conforme afirmam Schneider e Raw [31]. Os esquemas tradicionais desprezam a influência deste termo difusivo. O operador da difusão é dado por

$$\nabla^2 u_i = \frac{\partial^2 u_i}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_i}{\partial y^2} \quad (37)$$

Quando a difusão for o único processo relevante, isto é,

$$\nabla^2 u_i = 0 \quad (38)$$

uma boa representação para a variável no ponto de integração será resultante de uma interpolação que considere a natureza elíptica da difusão. Desta forma, pode escrever-se que

$$u_i \Big|_{i_{pi}} = \sum_{j=1}^4 N_j \Big|_{i_{pi}} u_j \quad (39)$$

Esta observação sugere um método para construção do operador de difusão para a variável no ponto de integração, que pode ser dado por

$$(V^2 u_i) \Big|_{i_{pi}} \approx \frac{\left(\sum_{j=1}^4 N_j \Big|_{i_{pi}} u_j \right) - u_i \Big|_{i_{pi}}}{L_d^2} \quad (40)$$

A equação (39) é bastante precisa, quando a difusão é dominante. Para levar-se em conta a correta interação com os outros termos da equação de transporte, é requerida a determinação da escala de comprimento de difusão adequada, L_d .

Para malhas com espaçamento uniforme, é possível utilizar-se uma analogia com os resultados obtidos através da formulação unidimensional, de maneira que,

$$L_d^2 = \frac{1}{2} \Delta x^2 \quad (41)$$

Se os efeitos da difusão transversal forem importantes, então a seguinte expressão poderá ser obtida:

$$L_d^2 = \frac{1}{2} \Delta x^2 + \frac{3}{8} \Delta y^2 \quad (42)$$

Uma explicação para esta escolha, bem como, discussões mais completas sobre outras opções para a escala de comprimento de difusão podem ser encontradas em Schneider e Raw [39].

Para aproximação do termo convectivo, foi proposta uma formulação baseada no esquema "upwind", que considera a influência da direção do escoamento sobre a solução do problema. O termo convectivo, para o ponto de integração $ip1$, pode ser aproximado por

$$\rho |\vec{V}| \left. \frac{\partial u_i}{\partial s} \right|_{ip1} = \rho |\vec{V}| \frac{u_i|_{ip1} - u_u}{L_c} \quad (43)$$

onde L_c é a escala de comprimento para convecção e u_u representa o valor de u_i , obtido por "upwind", na direção do vetor velocidade. A estimativa de u_u pode ser obtida por, pelo menos, quatro procedimentos:

- a) esquema "upwind" localmente unidimensional
- b) esquema "skew upwind" convencional
- c) esquema "skew upwind" ponderado pelo fluxo mássico
- d) esquema "skew upwind" local

O primeiro destes procedimentos é descartado devido à excessiva falsa difusão que resulta nesta formulação. O segundo, semelhante ao esquema proposto por Raithby [11], é facilmente implementado dentro do elemento através de interpolação ao longo da superfície apropriada do elemento, mas não foi o escolhido em virtude da possibilidade de ocorrência de coeficientes negativos. O terceiro procedimento garante a positividade dos coeficientes, mas ainda retém a difusão numérica, conforme análise apresentada por Schneider e Raw [39]. A última opção, o esquema "skew upwind" local, fornece maior flexibilidade e robustez ao método.

A formulação proposta por Schneider e Raw [31] é apresentada para o ponto de integração 1, $ip1$, conforme ilustrado na FIGURA 14.

Para a direção de escoamento, indicada na FIGURA 14a através da linha tracejada, o valor de u_u é interpolado entre os pontos 2 e 3, podendo ser expresso como

$$u_u = \frac{a}{b} u_2 + \left(1 - \frac{a}{b}\right) u_3 \quad (44)$$

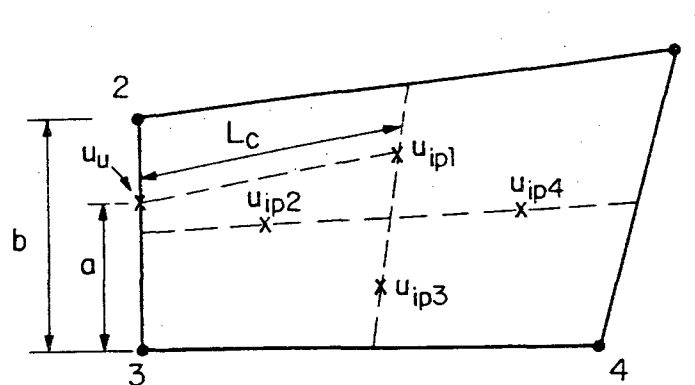
onde a e b são os comprimentos indicados na FIGURA 14a. Para a direção do escoamento, indicada na FIGURA 14b, onde o segmento de linha, com a orientação do vetor velocidade, intercepta a base do quadrante entre os pontos de integração $ip2$ e $ip4$, a interpolação é feita entre estes dois pontos de integração e pode ser expressa por

$$u_u = \frac{a}{b} u_{ip2} + \left(1 - \frac{a}{b}\right) u_{ip4} \quad (45)$$

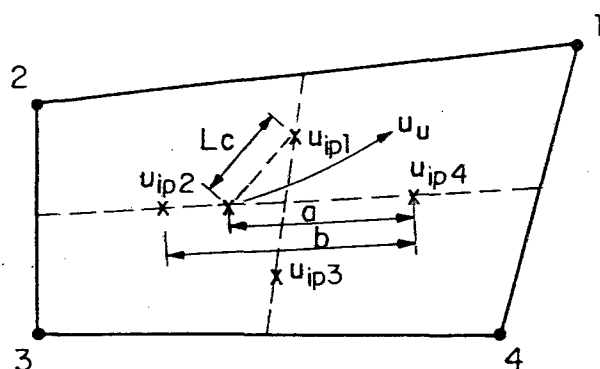
onde a e b estão indicados na FIGURA 14b. Neste caso, o valor de u_u depende de outros valores nos pontos de integração, e não dos valores nos centros do volume de controle. Em todos os possíveis casos de direção de escoamento, a interpolação é feita na face do subvolume de controle onde a linha de corrente local, passando através do ponto de integração, intercepta este segmento de linha. A interpolação é feita utilizando-se os valores mais próximos, ou seja, valores nos pontos nodais e nos pontos de integração. O comprimento de escala utilizado para a convecção é o comprimento obtido a partir do ponto de integração em questão, até o ponto apropriado de intersecção com a face do subvolume de controle.

Substituindo-se as aproximações dos termos da equação (33) dadas acima, obtém-se quatro equações envolvendo as variáveis nos quatro pontos de

integração e valores das variáveis dependentes nos vértices do elemento. Cada uma destas equações pode apresentar dependência com variáveis em mais de um ponto de integração, gerando um sistema de equações acopladas.



a) Possível direção de escoamento.



b) Outra possibilidade de direção de escoamento.

FIGURA 14 - Elemento típico para aproximação do termo convectivo, utilizando o esquema "skew upwind", proposto por Schneider e Raw [31].

Um custo computacional adicional aparece para a determinação das variáveis nos pontos de integração, quando as equações envolvem mais de um ponto de integração, comparado com a determinação dos valores das variáveis nestes pontos, envolvendo somente valores das variáveis nos centros do volume de controle. Este custo adicional requerido se justifica, entretanto, quando escoamentos complexos com recirculação estiverem presentes, pois a influência correta dos valores da variável em posições próximas estará sendo considerada. As equações para obtenção das velocidades nos pontos de integração apresentam a influência física correta da pressão e velocidades nos pontos vizinhos sobre as velocidades nos pontos de integração.

As expressões correspondentes aos pontos de integração servem para fechamento das equações da conservação de quantidade de movimento, trazendo a representação precisa dos fluxos convectivos através das faces dos volumes de controle, bem como, para fechamento da equação da conservação da massa, fornecendo a representação precisa dos fluxos de massa que atravessam as faces dos volumes de controle. Isto resulta em uma equação da conservação da massa, que contém pontos de pressão, sendo diagonalmente dominante e evita que o desacoplamento de pressão ocorra. Esta formulação permite minimizar tanto a difusão numérica quanto a oscilação da solução, conforme demonstrado por Schneider e Raw [32].

Nesta seção, foi realizada a análise de alguns esquemas que empregam o arranjo de variáveis co-localizadas. Os trabalhos apresentados por Peric et al. [33], Camarero et al. [34], Majumdar [36] e Marchi et al. [37] propõem diferentes alternativas para avaliação dos fluxos de massa nas faces do volume de controle, do arranjo de variáveis co-localizadas, sendo que estes dois últimos trabalhos sugerem opções para obtenção de uma solução, independente do parâmetro de relaxação utilizado, o que não acontece com o esquema proposto por Peric et al. [33]. Por outro lado, o esquema proposto por Camarero et al. [34],

apesar de simples, apresenta o inconveniente de utilizar um gradiente de pressão inadequado, na direção ξ , na equação de conservação da quantidade de movimento, em virtude do esquema de diferença para trás proposto para o cálculo do gradiente de pressão.

Schneider [35] propõe uma nova função de interpolação, no contexto de volumes finitos, que leva em conta os termos de pressão, fonte, difusão em ambas as direções e convecção na direção do escoamento, sendo que a convecção lateral é desprezada. Schneider e Raw [31,32] apresentam uma função de interpolação bidimensional, no contexto de elementos finitos, onde o termo convectivo é avaliado utilizando-se um esquema de interpolação na direção do escoamento, "*skew upwind*" local.

No presente trabalho, optou-se pela proposição de uma função de interpolação completa, obtida da própria equação de conservação, no contexto de volumes finitos. A função de interpolação completa contém todos os efeitos físicos relevantes do problema, ou seja, contém a influência dos termos transiente, convectivo, difusivo, de pressão e fonte, visando a correta avaliação das variáveis nas faces do volume de controle.

A seguir será apresentada a formulação proposta neste trabalho, com as equações governantes, discretização e transformação das equações, utilizando-se variáveis co-localizadas, no método de volumes finitos, bem como, a obtenção da função de interpolação completa proposta.

CAPÍTULO 3

FORMULAÇÃO PROPOSTA

Neste capítulo, serão apresentadas as equações governantes, com as hipóteses admitidas para a elaboração do algoritmo, a transformação das equações para o sistema de coordenadas generalizadas, a obtenção das equações aproximadas através do método de volumes finitos, bem como, a obtenção da função de interpolação completa proposta.

3.1 - EQUAÇÕES GOVERNANTES

Nesta seção, serão detalhados os principais passos executados para a obtenção das equações de conservação, as quais serão utilizadas, na seção 3.3 deste trabalho, para a geração das equações discretizadas através do método de volumes finitos. Esta seção visa ressaltar as hipóteses admitidas e tornar a apresentação do trabalho mais completa, por opção do autor, apesar de se tratar de um trabalho numérico, sem o objetivo de resolver um problema físico específico.

As equações da conservação da massa, quantidade de movimento e energia são dadas por

a) Equação da conservação da massa

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \vec{\nabla} \cdot \vec{V} = 0$$

(46)

b) Equação da conservação da quantidade de movimento

$$\rho \frac{D\vec{V}}{Dt} = \vec{\nabla} \cdot \vec{\tau} + \vec{B} \quad (47)$$

onde \vec{B} é o vetor dado pelas forças externas, por unidade de volume de fluido e $\vec{\tau}$ é o tensor tensão.

c) Equação da conservação de energia

$$\rho \frac{De}{Dt} + \vec{\nabla} \cdot \vec{q}'' = q''' + \vec{B} \cdot \vec{V} + \vec{\nabla} \cdot (\vec{\tau} \cdot \vec{V}) \quad (48)$$

onde e é a energia total do fluido por unidade de massa, q''' é a taxa de energia térmica liberada por unidade de volume de fluido e \vec{q}'' é o fluxo difusivo de calor, que pode ser obtido pela Lei de Fourier, dada pela equação (49),

$$\vec{q}'' = -k \vec{\nabla} T \quad (49)$$

A relação constitutiva para um fluido newtoniano é dada por

$$\tau_{ij} = -P \delta_{ij} + \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) + \delta_{ij} \lambda (\vec{\nabla} \cdot \vec{V}) \quad (50)$$

onde λ é o segundo coeficiente de viscosidade.

Utilizando-se a hipótese de Stokes, pode escrever-se que

$$\lambda = -\frac{2}{3} \mu \quad (51)$$

Para a solução do conjunto formado pelas equações (46), (47) e (48), é

necessária a escolha do sistema de coordenadas a ser utilizado, para decompôr a equação da conservação de quantidade de movimento em suas componentes.

A utilização de um sistema de coordenadas generalizadas (ξ, η) , que se adaptam à fronteira, para decomposição da equação da conservação de quantidade de movimento em suas componentes, nas direções ξ e η , leva à presença de termos como símbolos de Christoffel, conforme pode ser observado no trabalho apresentado por Devarayalu [40]. Estes símbolos aparecem para corrigir as componentes da equação da conservação de quantidade de movimento, que expressam a conservação ao longo de um caminho definido por uma direção coordenada, que não é uma linha reta. Quando ocorrer uma mudança brusca na inclinação e comprimento dos vetores de base, de um ponto para outro na malha, grandes erros serão introduzidos no esquema numérico, apesar desta correção [34]. Para solucionar este problema, é escolhido o sistema cartesiano de coordenadas para escrever as componentes da equação da conservação de quantidade de movimento, ou seja, a conservação da grandeza vetorial quantidade de movimento é expressa ao longo das direções x e y , que são linhas retas.

Definindo-se a energia interna do fluido por unidade de massa por I , pode escrever-se que

$$I = e - \frac{|\vec{V}|^2}{2} \quad (52)$$

As equações (46), (47) e (48) serão escritas no sistema de coordenadas cartesianas, com as seguintes hipóteses: fluido newtoniano, escoamento bidimensional e calor específico do fluido constante.

Utilizando-se as equações (49), (50), (51) e (52) e as relações termodinâmicas que relacionam a energia interna do fluido por unidade de massa com a temperatura, pode chegar-se a

a) Equação da conservação da massa

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho + \frac{\partial}{\partial x} (\rho u) + \frac{\partial}{\partial y} (\rho v) = 0 \quad (53)$$

b) Equação da conservação da quantidade de movimento na direção x

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (\rho u) + \frac{\partial}{\partial x} (\rho u u) + \frac{\partial}{\partial y} (\rho v u) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \\ + \rho g_x - \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial v}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{2}{3} \mu (\vec{\nabla} \cdot \vec{V}) \right) \end{aligned} \quad (54)$$

c) Equação da conservação da quantidade de movimento na direção y

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (\rho v) + \frac{\partial}{\partial x} (\rho u v) + \frac{\partial}{\partial y} (\rho v v) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \\ + \rho g_y - \frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial v}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{2}{3} \mu (\vec{\nabla} \cdot \vec{V}) \right) \end{aligned} \quad (55)$$

d) Equação da conservação da energia

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (\rho T) + \frac{\partial}{\partial x} (\rho u T) + \frac{\partial}{\partial y} (\rho v T) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{k}{c_p} \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \\ + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{k}{c_p} \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{q''' }{c_p} + \frac{\beta_f T}{c_p} \frac{DP}{Dt} + \frac{\mu \Phi}{c_p} \end{aligned} \quad (56)$$

onde β_f é o coeficiente de expansão térmica e Φ é a função dissipação, que podem ser dados por

$$\beta_f = \frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_P = - \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_P \quad (57)$$

$$\Phi = \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + 2 \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 \right\} - \frac{2}{3} (\vec{\nabla} \cdot \vec{V})^2 \quad (58)$$

As equações (53), (54), (55) e (56) podem ser escritas, para uma variável genérica ϕ , como

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho\phi) + \frac{\partial}{\partial x} (\rho u\phi) + \frac{\partial}{\partial y} (\rho v\phi) + P^\phi = \frac{\partial}{\partial x} \left(\Gamma^\phi \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\Gamma^\phi \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) + S^\phi \quad (59)$$

onde as expressões de ϕ , P^ϕ , S^ϕ e Γ^ϕ , em cada uma das equações de conservação, são apresentadas no QUADRO 1.

QUADRO 1 - Expressões para ϕ , Γ^ϕ , P^ϕ , S^ϕ , na equação da conservação, em forma generalizada.

ϕ	Γ^ϕ	P^ϕ	S^ϕ
1	0	0	0
u	μ	$\frac{\partial P}{\partial x}$	$\rho g_x - \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{2}{3} \mu (\vec{\nabla} \cdot \vec{V}) \right] +$ $+ \frac{\partial}{\partial x} \left[\mu \frac{\partial u}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\mu \frac{\partial v}{\partial x} \right]$
v	μ	$\frac{\partial P}{\partial y}$	$\rho g_y - \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{2}{3} \mu (\vec{\nabla} \cdot \vec{V}) \right] +$ $+ \frac{\partial}{\partial x} \left[\mu \frac{\partial u}{\partial y} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\mu \frac{\partial v}{\partial y} \right]$
T	k/c_p	0	$\frac{q''''}{c_p} + \frac{\beta_f T}{c_p} \frac{DP}{Dt} + \frac{\mu \Phi}{c_p}$

Para um grande número de problemas envolvendo o escoamento de fluidos não muito viscosos, em velocidades moderadas, os efeitos da dissipação viscosa podem ser desprezados. Para alguns escoamentos de líquidos e de gases com baixo número de Mach e mesmo em problemas de convecção natural, utilizando-se a aproximação de Boussinesq, pode assumir-se que a massa específica do fluido permanece constante.

Visando a análise do desempenho da formulação com o arranjo de variáveis co-localizadas, são feitas as seguintes hipóteses:

- a) Fluido newtoniano
- b) Escoamento laminar, bidimensional
- c) Forças de campo nulas em ambas as direções
- d) Propriedades físicas do fluido constantes, tais como, massa específica, viscosidade, calor específico, condutividade térmica, etc.
- e) Geração de calor nula
- f) Dissipação viscosa desprezível

É de se esperar que a relaxação de qualquer uma das hipóteses acima mencionadas não traz nenhuma dificuldade adicional à formulação proposta, podendo relaxar-se qualquer uma das restrições, quando necessário. A elaboração destas hipóteses tem como objetivo a simplificação das equações, para avaliação do efeito do arranjo de variáveis co-localizadas sobre a eficiência do algoritmo e não a modelagem de um problema físico específico.

Considerando-se as hipóteses enunciadas acima, as equações (53), (54), (55) e (56) podem ser escritas como

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho + \frac{\partial}{\partial x} (\rho u) + \frac{\partial}{\partial y} (\rho v) = 0 \quad (60)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho u) + \frac{\partial}{\partial x} (\rho u u) + \frac{\partial}{\partial y} (\rho v u) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial y} \right) - \frac{\partial P}{\partial x} \quad (61)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho v) + \frac{\partial}{\partial x} (\rho u v) + \frac{\partial}{\partial y} (\rho v v) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial v}{\partial y} \right) - \frac{\partial P}{\partial y} \quad (62)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho T) + \frac{\partial}{\partial x} (\rho u T) + \frac{\partial}{\partial y} (\rho v T) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{k}{c_p} \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{k}{c_p} \frac{\partial T}{\partial y} \right) \quad (63)$$

3.2 - TRANSFORMAÇÃO DAS EQUAÇÕES

As equações de conservação podem ser reescritas da seguinte forma:

$$\frac{\partial q}{\partial t} + \frac{\partial E}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} + P^\phi = \frac{\partial R}{\partial x} + \frac{\partial S}{\partial y} + S^\phi \quad (64)$$

onde

$$q = \rho \phi \quad (65)$$

$$E = \rho u \phi \quad (66)$$

$$F = \rho v \phi \quad (67)$$

$$R = \Gamma^\phi \frac{\partial \phi}{\partial x} \quad (68)$$

$$S = \Gamma^\phi \frac{\partial \phi}{\partial y} \quad (69)$$

onde S^ϕ e P^ϕ estão definidos no QUADRO 1.

A utilização de malhas não estruturadas fornece maior flexibilidade na disposição dos volumes elementares. Entretanto, os volumes discretos formados são irregulares, não seguindo uma regra de formação, tornando mais complexo o processo de integração da equação diferencial no volume elementar. No presente trabalho, serão empregadas malhas estruturadas, permitindo a utilização de

coordenadas generalizadas.

A solução das equações de conservação, escritas no sistema cartesiano de coordenadas, utilizando-se a discretização cartesiana, poderá apresentar sérios problemas quando da aplicação das condições de contorno, uma vez que as fronteiras dos volumes elementares podem não ser coincidentes com a fronteira do problema físico em questão. Além disto, o programa computacional ficará extremamente dependente da geometria do problema, o que é indesejável, pois o objetivo deste trabalho é a elaboração de um algoritmo geral, que se aplique a qualquer geometria. Visando a obtenção de uma maior flexibilidade da formulação para tratamento de problemas em geometrias arbitrárias, as equações de conservação escritas no sistema cartesiano de coordenadas são transformadas para o sistema de coordenadas generalizadas (ξ, η) , que se adaptam à fronteira.

Com base na seguinte transformação de coordenadas:

$$\xi = \xi(x, y) \quad (70)$$

$$\eta = \eta(x, y)$$

ou

$$x = x(\xi, \eta)$$

$$y = y(\xi, \eta) \quad (71)$$

a equação (64) pode ser escrita como

$$\frac{1}{J} \frac{\partial q}{\partial t} + \frac{\partial \hat{E}}{\partial \xi} + \frac{\partial \hat{F}}{\partial \eta} + \hat{P}\phi = \frac{\partial \hat{R}}{\partial \xi} + \frac{\partial \hat{S}}{\partial \eta} + \hat{S}\phi \quad (72)$$

onde

$$\hat{E} = \frac{1}{J} \left[\xi_x E + \xi_y F \right] \quad (73)$$

$$\hat{F} = \frac{1}{J} \left[\eta_x E + \eta_y F \right] \quad (74)$$

$$\hat{R} = \frac{1}{J} \left[\xi_x R + \xi_y S \right] \quad (75)$$

$$\hat{S} = \frac{1}{J} \left[\eta_x R + \eta_y S \right] \quad (76)$$

$$\hat{S}^\phi = \frac{S^\phi}{J} \quad (77)$$

$$\hat{P}^\phi = \frac{P^\phi}{J} \quad (78)$$

A equação (72) é obtida utilizando-se a regra da cadeia, onde as derivadas parciais de primeira ordem são transformadas através das seguintes correlações:

$$f_x = f_\xi \xi_x + f_\eta \eta_x \quad (79)$$

$$f_y = f_\xi \xi_y + f_\eta \eta_y \quad (80)$$

Derivadas de maior ordem são obtidas por aplicações sucessivas das equações (79) e (80), sendo que uma descrição detalhada da obtenção das derivadas e funções transformadas pode ser encontrada em [7].

Os elementos da matriz jacobiana da transformação são as métricas da transformação, e o determinante da matriz é o jacobiano da transformação, que pode ser dado por

$$J = \begin{vmatrix} \xi_x & \xi_y \\ \eta_x & \eta_y \end{vmatrix} = \xi_x \eta_y - \eta_x \xi_y \quad (81)$$

A determinação destas grandezas é necessária para solução das equações de conservação. O determinante da matriz da transformação inversa é dado por

$$J_0 = \begin{vmatrix} x_\xi & x_\eta \\ y_\xi & y_\eta \end{vmatrix} = x_\xi y_\eta - x_\eta y_\xi \quad (82)$$

O jacobiano, J , da transformação, ou seja, o determinante da matriz, dado pela equação (81), está relacionado com o determinante da matriz da transformação inversa, J_0 , dado pela equação (82), através de

$$J = \frac{1}{J_0} \quad (83)$$

Pela aplicação do teorema fundamental da função inversa, pode obter-se as relações dadas pelas equações (84), (85), (86) e (87), descritas em detalhe por Maliska [7],

$$\xi_x = y_\eta J \quad (84)$$

$$\xi_y = -x_\eta J \quad (85)$$

$$\eta_x = -y_\xi J \quad (86)$$

$$\eta_y = x_\xi J \quad (87)$$

Substituindo-se, na equação (72), as expressões dadas pelas equações (65) a (69), obtém-se

$$\begin{aligned} \frac{1}{J} \frac{\partial}{\partial t} (\rho\phi) + \frac{\partial}{\partial \xi} (\rho U\phi) + \frac{\partial}{\partial \eta} (\rho V\phi) + \hat{P}\phi &= \frac{\partial}{\partial \xi} \left[C_1 \frac{\partial \phi}{\partial \xi} + C_2 \frac{\partial \phi}{\partial \eta} \right] + \\ + \frac{\partial}{\partial \eta} \left[C_3 \frac{\partial \phi}{\partial \eta} + C_4 \frac{\partial \phi}{\partial \xi} \right] + \hat{S}\phi \end{aligned} \quad (88)$$

onde,

$$U = uy_{\eta} - vx_{\eta} \quad (89)$$

$$V = vx_{\xi} - uy_{\xi} \quad (90)$$

sendo U e V as componentes contravariantes do vetor velocidade, sem normalização métrica. Os coeficientes C_1 , C_2 e C_3 são os coeficientes de transporte transformados, expressos por

$$C_1 = \Gamma^{\phi} J \alpha \quad (91)$$

$$C_2 = - \Gamma^{\phi} J \beta \quad (92)$$

$$C_3 = \Gamma^{\phi} J \gamma \quad (93)$$

onde α , β , e γ são componentes do tensor métrico da transformação, dadas por

$$\alpha = x_{\eta}^2 + y_{\eta}^2 \quad (94)$$

$$\beta = x_{\xi}x_{\eta} + y_{\xi}y_{\eta} \quad (95)$$

$$\gamma = x_{\xi}^2 + y_{\xi}^2 \quad (96)$$

As expressões transformadas dos termos de pressão são dadas por

$$\hat{P}^u = \frac{\partial P}{\partial \xi} y_{\eta} - \frac{\partial P}{\partial \eta} y_{\xi} \quad (97)$$

$$\hat{P}^v = \frac{\partial P}{\partial \eta} x_{\xi} - \frac{\partial P}{\partial \xi} x_{\eta} \quad (98)$$

O conjunto formado pelas equações da conservação de massa, quantidade de movimento e energia, transformadas para o novo sistema de coordenadas (ξ, η) , tem a seguinte forma:

a) Equação da conservação da massa

$$\frac{1}{J} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \xi} (\rho U) + \frac{\partial}{\partial \eta} (\rho V) = 0 \quad (99)$$

b) Equação da conservação da quantidade de movimento na direção x

$$\begin{aligned} \frac{1}{J} \frac{\partial}{\partial t} (\rho u) + \frac{\partial}{\partial \xi} (\rho U u) + \frac{\partial}{\partial \eta} (\rho V u) = & - \frac{\partial P}{\partial \xi} y_{\eta} + \frac{\partial P}{\partial \eta} y_{\xi} + \\ & + \frac{\partial}{\partial \xi} \left[C_1 \frac{\partial u}{\partial \xi} + C_2 \frac{\partial u}{\partial \eta} \right] + \frac{\partial}{\partial \eta} \left[C_3 \frac{\partial u}{\partial \eta} + C_2 \frac{\partial u}{\partial \xi} \right] + \hat{S}^u \end{aligned} \quad (100)$$

c) Equação da conservação da quantidade de movimento na direção y

$$\begin{aligned} \frac{1}{J} \frac{\partial}{\partial t} (\rho v) + \frac{\partial}{\partial \xi} (\rho U v) + \frac{\partial}{\partial \eta} (\rho V v) = & - \frac{\partial P}{\partial \eta} x_{\xi} + \frac{\partial P}{\partial \xi} x_{\eta} + \\ & + \frac{\partial}{\partial \xi} \left[C_1 \frac{\partial v}{\partial \xi} + C_2 \frac{\partial v}{\partial \eta} \right] + \frac{\partial}{\partial \eta} \left[C_3 \frac{\partial v}{\partial \eta} + C_2 \frac{\partial v}{\partial \xi} \right] + \hat{S}^v \end{aligned} \quad (101)$$

d) Equação da conservação da energia

$$\begin{aligned} \frac{1}{J} \frac{\partial}{\partial t} (\rho T) + \frac{\partial}{\partial \xi} (\rho U T) + \frac{\partial}{\partial \eta} (\rho V T) = \\ = \frac{\partial}{\partial \xi} \left[C_1 \frac{\partial T}{\partial \xi} + C_2 \frac{\partial T}{\partial \eta} \right] + \frac{\partial}{\partial \eta} \left[C_3 \frac{\partial T}{\partial \eta} + C_2 \frac{\partial T}{\partial \xi} \right] + \hat{S}^T \end{aligned} \quad (102)$$

Neste sistema de equações, todas as informações sobre a geometria do problema em estudo estão presentes nas expressões das componentes

contravariantes da velocidade, nas expressões dos coeficientes transformados, que se encontram nos termos difusivos e no jacobiano da transformação.

Para a solução do conjunto de equações de conservação, que modelam um dado fenômeno, será utilizado o método de volumes finitos, sendo que cada equação será integrada sobre o volume de controle escolhido, gerando-se um sistema de equações algébricas aproximadas, que será resolvido para obtenção da solução final do problema.

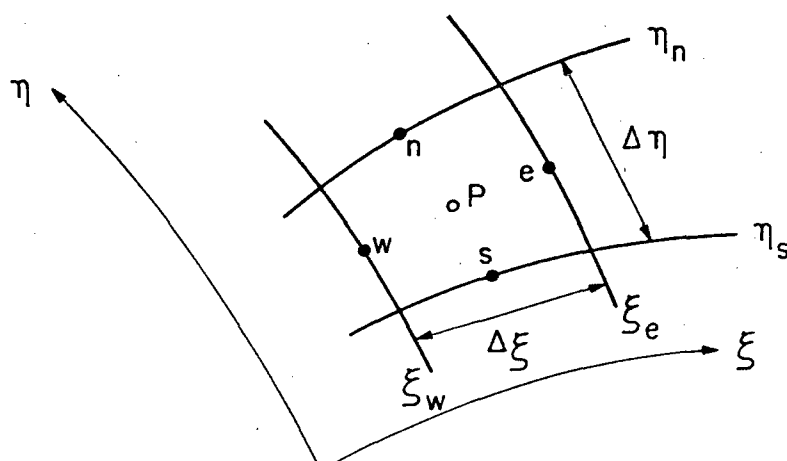
3.3 - DISCRETIZAÇÃO DAS EQUAÇÕES

Existem diversas maneiras de se obter as equações discretizadas. Devido à opção de se levar em conta os aspectos físicos relevantes no problema em estudo, visando a obtenção de uma melhor formulação para simulação de problemas não lineares, a alternativa de se respeitar os princípios de conservação a nível de volumes elementares parece adequada.

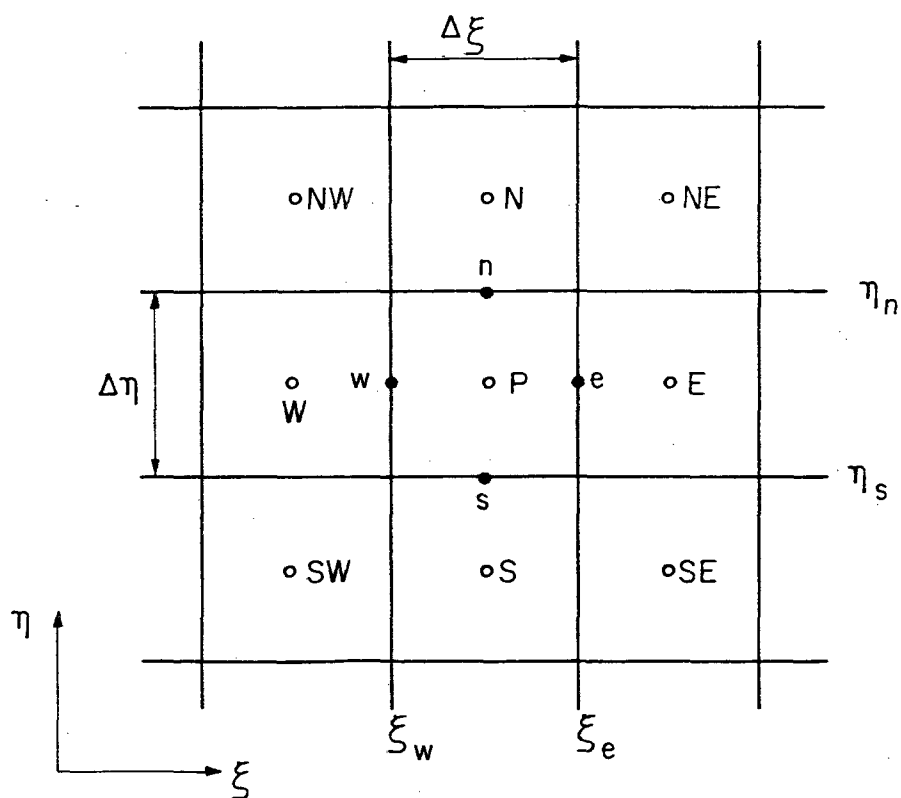
Deste modo, as equações de conservação, escritas na forma diferencial, serão integradas sobre os volumes de controle discretos.

A equação (88), escrita no sistema de coordenadas cartesianas e transformada para o sistema de coordenadas generalizadas ($\xi-\eta$), é utilizada para obtenção da equação discretizada, através da realização de uma integração espacial e temporal sobre o volume de controle delimitado por duas linhas de ξ constante e duas linhas de η constante, conforme mostra a FIGURA 15a. A FIGURA 15b apresenta o mesmo volume de controle representado no plano ($\xi-\eta$). A variável ϕ é armazenada no centro de cada volume de controle.

Integrando-se a equação (88), no tempo e no espaço, para o volume de controle mostrado na FIGURA 15, e considerando-se que o jacobiano da transformação, J , não varia com o tempo, já que a malha permanecerá fixa ao longo de todo processo de solução, obtém-se



a) Representação do volume de controle no plano $x-y$.



b) Representação do volume de controle no plano $\xi-\eta$

FIGURA 15 - Volume de controle utilizado para obtenção das equações discretizadas.

$$\begin{aligned}
& \int_{\xi_w}^{\xi_e} \int_{\eta_s}^{\eta_n} \frac{1}{J} \left\{ [\rho\phi]^{t+\Delta t} - [\rho\phi]^t \right\} d\eta d\xi + \int_t^{t+\Delta t} \int_{\eta_s}^{\eta_n} \left\{ [\rho U\phi]_e - [\rho U\phi]_w \right\} d\eta dt + \\
& + \int_t^{t+\Delta t} \int_{\xi_w}^{\xi_e} \left\{ [\rho V\phi]_n - [\rho V\phi]_s \right\} d\xi dt + \int_t^{t+\Delta t} \int_{\xi_w}^{\xi_e} \int_{\eta_s}^{\eta_n} \left[\hat{P}\phi - \hat{S}\phi \right] d\eta d\xi dt = \\
& = \int_t^{t+\Delta t} \int_{\eta_s}^{\eta_n} \left\{ \left[C_1 \frac{\partial \phi}{\partial \xi} + C_2 \frac{\partial \phi}{\partial \eta} \right]_e - \left[C_1 \frac{\partial \phi}{\partial \xi} + C_2 \frac{\partial \phi}{\partial \eta} \right]_w \right\} d\eta dt + \\
& + \int_t^{t+\Delta t} \int_{\xi_w}^{\xi_e} \left\{ \left[C_3 \frac{\partial \phi}{\partial \eta} + C_2 \frac{\partial \phi}{\partial \xi} \right]_n - \left[C_3 \frac{\partial \phi}{\partial \eta} + C_2 \frac{\partial \phi}{\partial \xi} \right]_s \right\} d\xi dt
\end{aligned} \tag{103}$$

onde t é o nível de tempo e Δt é o avanço de tempo. Nesta etapa, convém analisar os termos difusivos, entre colchetes, da equação (103). Pode mostrar-se que os termos entre colchetes, da equação (103), relacionam-se com a variação da variável ϕ ao longo da direção normal às faces leste e norte, através de

$$\left(\Gamma^\phi \sqrt{\alpha} \frac{\partial \phi}{\partial n} \right) \Big|_e = \left[C_1 \frac{\partial \phi}{\partial \xi} \right]_e + \left[C_2 \frac{\partial \phi}{\partial \eta} \right]_e \tag{104}$$

$$\left(\Gamma^\phi \sqrt{\gamma} \frac{\partial \phi}{\partial n} \right) \Big|_n = \left[C_2 \frac{\partial \phi}{\partial \xi} \right]_n + \left[C_3 \frac{\partial \phi}{\partial \eta} \right]_n \tag{105}$$

Expressões análogas às equações (104) e (105) podem ser obtidas para as faces oeste e sul.

Substituindo as equações (104) e (105) na equação (103), obtém-se

$$\begin{aligned}
& \int_{\xi_w}^{\xi_e} \int_{\eta_s}^{\eta_n} \frac{1}{J} \left\{ [\rho\phi]^{t+\Delta t} - [\rho\phi]^t \right\} d\eta d\xi + \\
& + \int_t^{t+\Delta t} \int_{\eta_s}^{\eta_n} \left\{ [\rho U\phi]_e - [\rho U\phi]_w \right\} d\eta dt + \\
& + \int_t^{t+\Delta t} \int_{\xi_w}^{\xi_e} \left\{ [\rho V\phi]_n - [\rho V\phi]_s \right\} d\xi dt + \quad (106) \\
& + \int_t^{t+\Delta t} \int_{\xi_w}^{\xi_e} \int_{\eta_s}^{\eta_n} \left[\hat{p}^\phi - \hat{S}^\phi \right] d\eta d\xi dt = \\
& = \int_t^{t+\Delta t} \int_{\eta_s}^{\eta_n} \left\{ \left[\Gamma^\phi \sqrt{\alpha} \frac{\partial \phi}{\partial n} \right]_e + \left[\Gamma^\phi \sqrt{\alpha} \frac{\partial \phi}{\partial n} \right]_w \right\} d\eta dt + \\
& + \int_t^{t+\Delta t} \int_{\xi_w}^{\xi_e} \left\{ \left[\Gamma^\phi \sqrt{\gamma} \frac{\partial \phi}{\partial n} \right]_n + \left[\Gamma^\phi \sqrt{\gamma} \frac{\partial \phi}{\partial n} \right]_s \right\} d\xi dt
\end{aligned}$$

As hipóteses admitidas, para realização das integrações que aparecem na equação (106), são:

a) Para a integração temporal, o valor de ϕ é tomado no instante de tempo $t + \theta\Delta t$, que representa o valor de ϕ entre os instantes t e $t + \Delta t$. Por simplicidade, o nível de tempo $t + \Delta t$ é denotado por $n + 1$, t por n e $t + \theta\Delta t$ por $n + \theta$, onde θ varia entre 0 (formulação explícita) e 1 (formulação implícita).

b) $(\rho\phi)$ e \hat{S}^ϕ são constantes no volume de controle.

c) os fluxos de massa nas faces e , w , n e s são uniformes ao longo de cada face.

d) ϕ na face e sua derivada normal à face, as métricas, Γ^ϕ e a pressão

na face são uniformes ao longo de cada face.

Introduzindo-se as hipóteses enunciadas acima, na equação (106), obtém-se

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{J_P} \left\{ (\rho\phi)_P^{n+1} - (\rho\phi)_P^n \right\} \Delta\xi\Delta\eta + \left[\dot{m}_{fe}\phi_e - \dot{m}_{fw}\phi_w - \right. \\
 & \left. - \dot{m}_{fs}\phi_s + \dot{m}_{fn}\phi_n \right]^{n+\theta} \Delta t = \left[\left(\sqrt{\alpha} \Gamma^\phi \frac{\partial\phi}{\partial n} \right)_e + \left(\sqrt{\alpha} \Gamma^\phi \frac{\partial\phi}{\partial n} \right)_w \right]^{n+\theta} \Delta\eta\Delta t + \\
 & + \left[\left(\Gamma^\phi \sqrt{\gamma} \frac{\partial\phi}{\partial n} \right)_s + \left(\Gamma^\phi \sqrt{\gamma} \frac{\partial\phi}{\partial n} \right)_n \right]^{n+\theta} \Delta\xi\Delta t + \left\{ L \left[\hat{S}_P^\phi \right]^{n+\theta} - L \left[\hat{P}_P^\phi \right]^{n+\theta} \right\} \Delta\xi\Delta\eta\Delta t
 \end{aligned} \quad (107)$$

onde \dot{m}_{fi} representa o fluxo de massa na face i , onde $i = e, w, s, n$, $L[]$ representa a aproximação numérica do termo no interior dos colchetes e,

$$L \left[\hat{P}_P^u \right] = \frac{\left[(Py_\eta)_e - (Py_\eta)_w \right]}{\Delta\xi} + \frac{\left[(Py_\xi)_s - (Py_\xi)_n \right]}{\Delta\eta} \quad (108)$$

$$L \left[\hat{P}_P^v \right] = \frac{\left[(Px_\xi)_n - (Px_\xi)_s \right]}{\Delta\eta} + \frac{\left[(Px_\eta)_w - (Px_\eta)_e \right]}{\Delta\xi} \quad (109)$$

Para avaliação da pressão nas faces do volume de controle, pode utilizar-se uma interpolação linear entre os pontos vizinhos, dada a natureza elíptica da pressão, conforme Schneider e Raw [39].

Se fosse adotada uma variação linear de ϕ com o tempo, entre os instantes de tempo t e $t + \Delta t$, ter-se-ia

$$\phi^{n+\theta} = \theta \phi^{n+1} + (1 - \theta) \phi^n \quad (110)$$

onde θ varia entre 0 (formulação explícita) e 1 (formulação implícita).

Visando a linearização da equação (107), posto que os valores das componentes da velocidade, u e v , nas faces do volume de controle, não são conhecidos, os valores dos fluxos de massa são tomados da iteração anterior.

Para obtenção das equações aproximadas, torna-se necessária a avaliação da variável ϕ na face do volume de controle, bem como, da derivada de ϕ , ao longo da direção normal à face do volume de controle, em função dos valores das variáveis no centro do volume de controle.

3.3.1 - Função de interpolação completa

Existem muitas maneiras de se avaliar as variáveis nas faces do volume de controle, conforme já foi apresentado no CAPÍTULO 2 deste trabalho. Com o objetivo de minimizar os erros de difusão numérica, resultantes da utilização da função de interpolação unidimensional, quando o vetor velocidade se encontra inclinado com relação à malha utilizada, e levar em conta os aspectos físicos relevantes do problema em estudo, é escolhida a função de interpolação obtida da própria equação de conservação, escrita para a face do volume de controle, com os termos transiente, convectivo, difusivo, de pressão e fonte.

A seguir será apresentada a equação para avaliação da variável ϕ na face leste do volume de controle, ilustrado na FIGURA 16, em função dos valores das variáveis dependentes no centro do volume de controle, obtida a partir da equação de conservação.

A equação de conservação de quantidade de movimento, escrita para a face leste do volume de controle, pode ser dada por

$$\begin{aligned} \left(\frac{\rho}{J} \frac{\partial \phi}{\partial t} \right) \Big|_e + \rho U \frac{\partial \phi}{\partial \xi} \Big|_e + \rho V \frac{\partial \phi}{\partial \eta} \Big|_e + \hat{P} \phi \Big|_e = \\ = \frac{\partial}{\partial \xi} \left[C_1 \frac{\partial \phi}{\partial \xi} \right] \Big|_e + \frac{\partial}{\partial \eta} \left[C_3 \frac{\partial \phi}{\partial \eta} \right] \Big|_e + \hat{S} T \phi \Big|_e \end{aligned} \quad (111)$$

onde

$$\hat{S}^T \phi = \hat{S} \phi + \frac{\partial}{\partial \xi} \left[C_2 \frac{\partial \phi}{\partial \eta} \right] + \frac{\partial}{\partial \eta} \left[C_2 \frac{\partial \phi}{\partial \xi} \right] \quad (112)$$

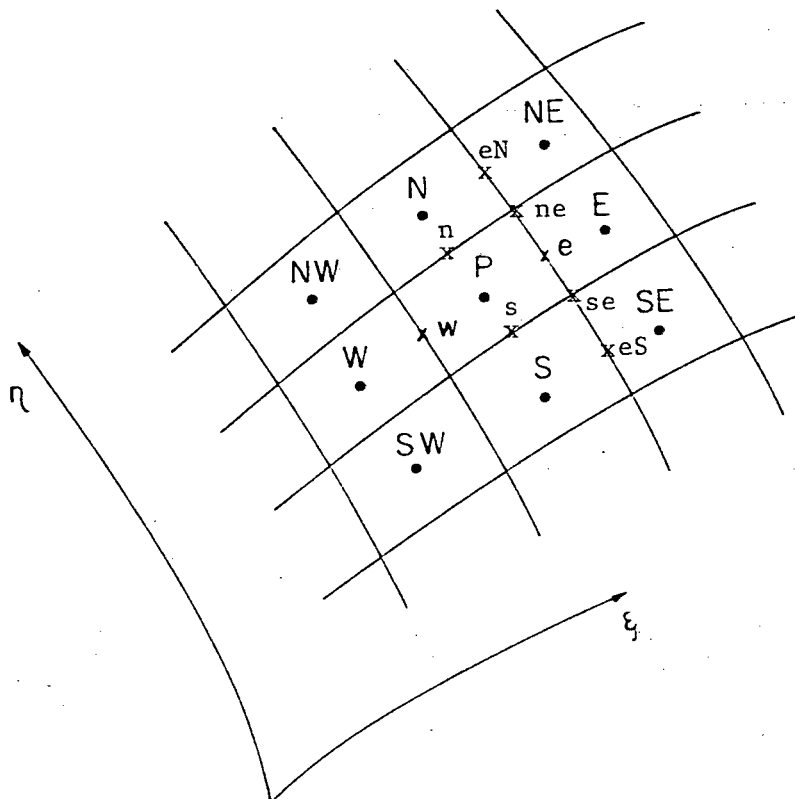


FIGURA 16 - Notação utilizada na função de interpolação completa.

Cada termo da equação (111) é aproximado como mostrado a seguir.

a) Termo transiente: é aproximado por diferença para trás, de maneira que é requerido o armazenamento do valor da variável dependente, obtido na iteração anterior,

$$\left(\frac{\rho}{J} \frac{\partial \phi}{\partial t} \right) \Big|_e = \rho_e \frac{\phi_e - \phi_e^0}{J_e \Delta t} \quad (113)$$

b) Termo fonte: é aproximado utilizando-se interpolação linear entre os valores de \hat{S}^ϕ nos pontos P e E, vizinhos à face e, para obtenção de $\hat{S}^\phi|_e$ e, para o cálculo dos termos difusivos cruzados, é utilizada diferença central para todas as derivadas, obtendo-se

$$\hat{S}^T \phi|_e = \hat{S}^\phi|_e + \frac{\partial}{\partial \xi} \left[C_2 \frac{\partial \phi}{\partial \eta} \right]|_e + \frac{\partial}{\partial \eta} \left[C_2 \frac{\partial \phi}{\partial \xi} \right]|_e \quad (114)$$

onde,

$$\hat{S}^\phi|_e = \frac{(\sqrt{\gamma} \Delta \xi)|_E \hat{S}^\phi|_P + (\sqrt{\gamma} \Delta \xi)|_P \hat{S}^\phi|_E}{[(\sqrt{\gamma} \Delta \xi)|_E + (\sqrt{\gamma} \Delta \xi)|_P]} \quad (115)$$

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \left[C_2 \frac{\partial \phi}{\partial \eta} \right]|_e = \frac{C_{2E} \frac{\partial \phi}{\partial \eta}|_E - C_{2P} \frac{\partial \phi}{\partial \eta}|_P}{\left(\frac{\Delta \xi_P + \Delta \xi_E}{2} \right)} \quad (116)$$

$$\frac{\partial}{\partial \eta} \left[C_2 \frac{\partial \phi}{\partial \xi} \right]|_e = \frac{C_{2eN} \frac{\partial \phi}{\partial \xi}|_{eN} - C_{2eS} \frac{\partial \phi}{\partial \xi}|_{eS}}{\left(\frac{\Delta \eta_{eN} + 2\Delta \eta_e + \Delta \eta_{eS}}{2} \right)} \quad (117)$$

e,

$$\frac{\partial \phi}{\partial \eta}|_E = \frac{\phi_{NE} - \phi_{SE}}{\left(\frac{\Delta \eta_{NE} + 2\Delta \eta_E + \Delta \eta_{SE}}{2} \right)} \quad (118)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial \eta}|_P = \frac{\phi_N - \phi_P}{\left(\frac{\Delta \eta_N + 2\Delta \eta_P + \Delta \eta_S}{2} \right)} \quad (119)$$

$$\left. \frac{\partial \phi}{\partial \xi} \right|_{eN} = \frac{\phi_{NE} - \phi_N}{\left(\frac{\Delta \xi_{NE} + \Delta \xi_N}{2} \right)} \quad (120)$$

$$\left. \frac{\partial \phi}{\partial \xi} \right|_{eS} = \frac{\phi_{SE} - \phi_S}{\left(\frac{\Delta \xi_{SE} + \Delta \xi_S}{2} \right)} \quad (121)$$

Os subscritos eN e eS referem-se às faces e dos volumes de controle N e S, respectivamente. O comprimento da face leste do volume de controle é dado por $\sqrt{\alpha} \Delta \eta$, enquanto que da face norte é dado por $\sqrt{\gamma} \Delta \xi$. O comprimento das faces oeste e sul do volume de controle é calculado de maneira análoga [7].

Optou-se por manter $\Delta \xi$ e $\Delta \eta$ nas equações, com o objetivo de tornar mais geral a apresentação da função de interpolação completa. Convém salientar que, normalmente, emprega-se $\Delta \xi = \Delta \eta = 1$.

Assim, pode escrever-se que

$$\begin{aligned} \hat{ST}\phi|_e &= \frac{4}{(\Delta \eta_{eN} + \Delta \eta_{eS} + 2\Delta \eta_e)} \left\{ \frac{C_{2eN} (\phi_{NE} - \phi_N)}{(\Delta \xi_{NE} + \Delta \xi_N)} - \frac{C_{2eS} (\phi_{SE} - \phi_S)}{(\Delta \xi_{SE} + \Delta \xi_S)} \right\} + \\ &+ \frac{4 C_{2E} (\phi_{NE} - \phi_{SE})}{(\Delta \eta_{NE} + \Delta \eta_{SE} + 2\Delta \eta_E)(\Delta \xi_P + \Delta \xi_E)} - \frac{4 C_{2P} (\phi_N - \phi_S)}{(\Delta \eta_S + \Delta \eta_N + 2\Delta \eta_P)(\Delta \xi_P + \Delta \xi_E)} + \\ &+ \frac{(\sqrt{\gamma} \Delta \xi)|_E \hat{S}\phi|_P + (\sqrt{\gamma} \Delta \xi)|_P \hat{S}\phi|_E}{[(\sqrt{\gamma} \Delta \xi)|_E + (\sqrt{\gamma} \Delta \xi)|_P]} \end{aligned} \quad (122)$$

c) Termos de gradiente de pressão: é utilizado o esquema de diferença central para obtenção de todas as derivadas, resultando

$$\hat{P}^u|_e = y_\eta|_e \frac{\partial P}{\partial \xi}|_e - y_\xi|_e \frac{\partial P}{\partial \eta}|_e \quad (123)$$

$$\hat{P}^v|_e = x_\xi|_e \frac{\partial P}{\partial \eta}|_e - x_\eta|_e \frac{\partial P}{\partial \xi}|_e \quad (124)$$

onde,

$$\frac{\partial P}{\partial \xi}|_e = \frac{P_E - P_P}{\left(\frac{\Delta \xi_E + \Delta \xi_P}{2} \right)} \quad (125)$$

$$\frac{\partial P}{\partial \eta}|_e = \frac{P_{eN} - P_{eS}}{\left(\frac{\Delta \eta_{eN} + 2\Delta \eta_e + \Delta \eta_{eS}}{2} \right)} \quad (126)$$

e,

$$P_{eN} = \frac{(\sqrt{\gamma} \Delta \xi)|_N P_{NE} + (\sqrt{\gamma} \Delta \xi)|_{NE} P_N}{[(\sqrt{\gamma} \Delta \xi)|_N + (\sqrt{\gamma} \Delta \xi)|_{NE}]} \quad (127)$$

$$P_{eS} = \frac{(\sqrt{\gamma} \Delta \xi)|_S P_{SE} + (\sqrt{\gamma} \Delta \xi)|_{SE} P_S}{[(\sqrt{\gamma} \Delta \xi)|_S + (\sqrt{\gamma} \Delta \xi)|_{SE}]} \quad (128)$$

Assim, os termos de gradiente de pressão da equação de conservação da quantidade de movimento, nas direções x e y , podem ser dados por

$$\begin{aligned} \hat{P}^u|_e = & \frac{-2 y_\xi|_e}{(\Delta \eta_{eN} + \Delta \eta_{eS} + 2\Delta \eta_e)} \left\{ \frac{(\sqrt{\gamma} \Delta \xi)|_{NE} P_N + (\sqrt{\gamma} \Delta \xi)|_N P_{NE}}{[(\sqrt{\gamma} \Delta \xi)|_N + (\sqrt{\gamma} \Delta \xi)|_{NE}]} - \right. \\ & \left. - \frac{(\sqrt{\gamma} \Delta \xi)|_{SE} P_S + (\sqrt{\gamma} \Delta \xi)|_S P_{SE}}{[(\sqrt{\gamma} \Delta \xi)|_S + (\sqrt{\gamma} \Delta \xi)|_{SE}]} \right\} + \frac{2y_\eta|_e (P_E - P_P)}{(\Delta \xi_P + \Delta \xi_E)} \end{aligned} \quad (129)$$

$$\hat{P}^v \Big|_e = \frac{2 x_{\xi} \Big|_e}{(\Delta \eta_{eN} + \Delta \eta_{eS} + 2 \Delta \eta_e)} \left\{ \frac{(\sqrt{\gamma} \Delta \xi) \Big|_{NE} P_N + (\sqrt{\gamma} \Delta \xi) \Big|_N P_{NE}}{[(\sqrt{\gamma} \Delta \xi) \Big|_N + (\sqrt{\gamma} \Delta \xi) \Big|_{NE}]} - \frac{(\sqrt{\gamma} \Delta \xi) \Big|_{SE} P_S + (\sqrt{\gamma} \Delta \xi) \Big|_S P_{SE}}{[(\sqrt{\gamma} \Delta \xi) \Big|_S + (\sqrt{\gamma} \Delta \xi) \Big|_{SE}]} \right\} - \frac{2 x_{\eta} \Big|_e (P_E - P_P)}{(\Delta \xi_P + \Delta \xi_E)} \quad (130)$$

Esta representação fornece uma ligação entre as velocidades nas faces dos volumes de controle e as pressões nos centros dos volumes de controle.

d) Termo difusivo: é utilizado o esquema de diferença central para aproximação de todas as derivadas, obtendo-se

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \left[C_1 \frac{\partial \phi}{\partial \xi} \right] \Big|_e = 8 C_{1e} \left\{ \frac{\phi_P \Delta \xi_E + \phi_E \Delta \xi_P - \phi_e (\Delta \xi_P + \Delta \xi_E)}{(\Delta \xi_P + \Delta \xi_E) \Delta \xi_P \Delta \xi_E} \right\} \quad (131)$$

$$\frac{\partial}{\partial \eta} \left[C_3 \frac{\partial \phi}{\partial \eta} \right] \Big|_e = \frac{C_{3ne} \frac{\partial \phi}{\partial \eta} \Big|_{ne} - C_{3se} \frac{\partial \phi}{\partial \eta} \Big|_{se}}{\Delta \eta_e} \quad (132)$$

onde,

$$\frac{\partial \phi}{\partial \eta} \Big|_{ne} = \frac{\phi_{eN} - \phi_e}{\left(\frac{\Delta \eta_{eN} + \Delta \eta_e}{2} \right)} \quad (133)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial \eta} \Big|_{se} = \frac{\phi_e - \phi_{eS}}{\left(\frac{\Delta \eta_{eS} + \Delta \eta_e}{2} \right)} \quad (134)$$

e,

$$\phi_{eN} = \frac{(\sqrt{\gamma} \Delta \xi)|_N \phi_{NE} + (\sqrt{\gamma} \Delta \xi)|_{NE} \phi_N}{[(\sqrt{\gamma} \Delta \xi)|_N + (\sqrt{\gamma} \Delta \xi)|_{NE}]} \quad (135)$$

$$\phi_{eS} = \frac{(\sqrt{\gamma} \Delta \xi)|_S \phi_{SE} + (\sqrt{\gamma} \Delta \xi)|_{SE} \phi_S}{[(\sqrt{\gamma} \Delta \xi)|_S + (\sqrt{\gamma} \Delta \xi)|_{SE}]} \quad (136)$$

Assim,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \eta} \left[C_3 \frac{\partial \phi}{\partial \eta} \right] \Big|_e &= \frac{2 C_{3ne}}{\Delta \eta_e (\Delta \eta_{eN} + \Delta \eta_e)} \left\{ \frac{(\sqrt{\gamma} \Delta \xi)|_{NE} \phi_N + (\sqrt{\gamma} \Delta \xi)|_N \phi_{NE}}{[(\sqrt{\gamma} \Delta \xi)|_N + (\sqrt{\gamma} \Delta \xi)|_{NE}]} - \phi_e \right\} - \\ &- \frac{2 C_{3se}}{\Delta \eta_e (\Delta \eta_e + \Delta \eta_{eS})} \left\{ \phi_e - \frac{(\sqrt{\gamma} \Delta \xi)|_{SE} \phi_S + (\sqrt{\gamma} \Delta \xi)|_S \phi_{SE}}{[(\sqrt{\gamma} \Delta \xi)|_S + (\sqrt{\gamma} \Delta \xi)|_{SE}]} \right\} \end{aligned} \quad (137)$$

e) Termo convectivo: é utilizado o esquema de diferença central para aproximação de todas as derivadas, obtendo-se

$$\rho U \frac{\partial \phi}{\partial \xi} \Big|_e = 2 \rho_e U_e \frac{(\phi_E - \phi_P)}{(\Delta \xi_P + \Delta \xi_E)} \quad (138)$$

e

$$\rho V \frac{\partial \phi}{\partial \eta} \Big|_e = \rho_e V_e \frac{(\phi_{eN} - \phi_{eS})}{(\Delta \eta_{eN} + 2 \Delta \eta_e + \Delta \eta_{eS})} \quad (139)$$

onde ϕ_{eN} e ϕ_{eS} são dados pelas equações (135) e (136), respectivamente, resultando em

$$\rho V \frac{\partial \phi}{\partial \eta} \Big|_e = \frac{2 \rho_e V_e}{(\Delta \eta_{eN} + \Delta \eta_{eS} + 2\Delta \eta_e)} \left\{ \frac{(\sqrt{\gamma} \Delta \xi)|_N \phi_{NE} + (\sqrt{\gamma} \Delta \xi)|_{NE} \phi_N}{[(\sqrt{\gamma} \Delta \xi)|_{NE} + (\sqrt{\gamma} \Delta \xi)|_N]} - \frac{(\sqrt{\gamma} \Delta \xi)|_{SE} \phi_S + (\sqrt{\gamma} \Delta \xi)|_S \phi_{SE}}{[(\sqrt{\gamma} \Delta \xi)|_{SE} + (\sqrt{\gamma} \Delta \xi)|_S]} \right\} \quad (140)$$

Substituindo-se as expressões dadas pelas equações (113), (122), (129), (130), (131), (137), (138) e (140) na equação (111), obtém-se uma expressão para obtenção de ϕ_e , ou seja, da variável ϕ na face e do volume de controle centrado em P, em função da variável ϕ e pressão, avaliadas nos centros do volume de controle, que pode ser expressa como

$$a_e^e \phi_e = a_e^0 \phi_e^0 + a_P^e \phi_P + a_E^e \phi_E + a_S^e \phi_S + a_N^e \phi_N + a_{NE}^e \phi_{NE} + a_{SE}^e \phi_{SE} + b_e^\phi \quad (141)$$

onde os coeficientes a_e^e , a_e^0 , a_P^e , a_E^e , a_S^e , a_N^e , a_{NE}^e , a_{SE}^e , b_e^ϕ estão definidos no APÊNDICE A, deste trabalho.

Para o caso particular de escoamento bidimensional, com gradiente de pressão e termos fontes nulos, com valores de α e γ constantes no domínio e idênticos, sendo β nulo (malha ortogonal), os coeficientes da equação (141), para avaliação das variáveis na face leste no volume de controle, reduzem-se a

$$a_P^e = 4C_{1e} + \rho_e U_e \quad (142)$$

$$a_E^e = 4C_{1e} - \rho_e U_e \quad (143)$$

$$a_N^e = \frac{C_{3ne}}{2} - \frac{\rho_e V_e}{4} \quad (144)$$

$$a_S^e = \frac{C_{3se}}{2} + \frac{\rho_e V_e}{4} \quad (145)$$

$$a_{NE}^e = \frac{C_{3ne}}{2} - \frac{\rho_e V_e}{4} \quad (146)$$

$$a_{SE}^e = \frac{C_{3se}}{2} + \frac{\rho_e V_e}{4} \quad (147)$$

$$b_e^\phi = 0 \quad (148)$$

$$a_e^e = 8C_{1e} + C_{3ne} + C_{3se} \quad (149)$$

Definindo-se

$$Pe_x^e = \frac{\rho_e U_e \Delta \xi}{C_{1e}} \quad (150)$$

$$Pe_y^e = \frac{\rho_e V_e \Delta \eta}{C_{3e}} \quad (151)$$

$$\bar{\phi}_x = \frac{\phi_P + \phi_E}{2} \quad (152)$$

$$\bar{\phi}_y = \frac{\phi_N + \phi_{NE} + \phi_S + \phi_{SE}}{4} \quad (153)$$

pode escrever-se que

$$\phi_e = 0,8 (\bar{\phi}_x + k_x) + 0,2 (\bar{\phi}_y + k_y) \quad (154)$$

onde

$$k_x = \frac{Pe_x^e}{8} (\phi_P - \phi_E) \quad (155)$$

$$k_y = \frac{Pe_y^e}{8} (\phi_S + \phi_{SE} - \phi_N - \phi_{NE}) \quad (156)$$

A equação (154), para o caso de difusão pura, $Pe_x^e \rightarrow 0$ e $Pe_y^e \rightarrow 0$, reduz-se a

$$\phi_e = 0,8 \bar{\phi}_x + 0,2 \bar{\phi}_y \quad (157)$$

A variável ϕ na face do volume de controle é obtida através de uma média ponderada entre as variáveis $\bar{\phi}_x$ e $\bar{\phi}_y$, com um peso de 80% para a interpolação linear na direção x , $\bar{\phi}_x$, e 20% para a média entre os quatro pontos vizinhos ϕ_{NE} , ϕ_N , ϕ_{SE} e ϕ_S . O esquema WUDS, neste caso, reduz-se a $\bar{\phi}_x$, não levando em conta, portanto uma importante influência que é a difusão na direção y .

Para o caso de convecção pura, na direção x , $Pe_y^e \rightarrow 0$, a equação (154) se reduz a

$$\phi_e = \bar{\phi}_x + 0,8 k_x \quad (158)$$

ou seja, a variável ϕ na face leste do volume de controle é obtida através de uma interpolação linear entre os dois pontos vizinhos, na direção x , sendo adicionado um parâmetro que leva em conta a magnitude e o sentido do vetor velocidade, através Pe_x^e . O esquema WUDS, para esta situação reduz-se ao esquema "upwind", ou seja,

$$\phi_e = \phi_P, \quad \text{se } |\vec{V}| > 0 \quad (159)$$

$$\phi_e = \phi_E, \quad \text{se } |\vec{V}| < 0 \quad (160)$$

Convém salientar que, neste caso, foi possível explicitar ϕ_e em função dos pontos vizinhos, em virtude da presença do termo transiente, na expressão para avaliação de ϕ_e . Caso a equação que se deseja resolver não apresente o termo transiente, pode utilizar-se o esquema de derivada de um lado só ("upwind") para avaliação do termo convectivo, permitindo-se explicitar ϕ_e em função dos pontos vizinhos.

Para o caso de convecção pura bidimensional, a equação (154) se reduz a

$$\phi_e = 0,8 (\bar{\phi}_x + k_x) + 0,2 (\bar{\phi}_y + k_y) \quad (161)$$

que pondera a influência dos seis pontos vizinhos à face leste do volume de controle, considerando-se a magnitude e o sentido do vetor velocidade. O esquema WUDS se reduz, neste caso, ao esquema "upwind", como na situação unidimensional já analisada, apresentando grandes erros de difusão numérica, em virtude de não se levar em conta a inclinação do vetor velocidade com relação à malha computacional.

A função de interpolação completa considera a influência dos seis pontos vizinhos à face do volume de controle e contém a influência de todos os termos da própria equação de conservação que se deseja resolver, não sendo necessária a utilização de esquemas de correção para levar em conta a inclinação do vetor velocidade com relação à malha, como os esquemas "skew upwind" [11].

Para avaliação da componente do gradiente de ϕ na direção normal à face e, é proposta a seguinte equação, aproximada por diferença central:

$$\begin{aligned}
\left. \frac{\partial \phi}{\partial n} \right|_e &= \left[\frac{C_1}{\Gamma_e \phi \sqrt{\alpha}} \frac{\partial \phi}{\partial \xi} \right]_e + \left[\frac{C_2}{\Gamma_e \phi \sqrt{\alpha}} \frac{\partial \phi}{\partial \eta} \right]_e = \\
&= \frac{2 C_{2e}}{\Gamma_e \phi \sqrt{\alpha_e} (\Delta \eta_{eN} + \Delta \eta_{eS} + 2 \Delta \eta_e)} \left\{ \frac{[(\sqrt{\gamma} \Delta \xi)|_{NE} \phi_N + (\sqrt{\gamma} \Delta \xi)|_N \phi_{NE}]}{[(\sqrt{\gamma} \Delta \xi)|_{NE} + (\sqrt{\gamma} \Delta \xi)|_N]} - \right. \\
&\quad \left. - \frac{[(\sqrt{\gamma} \Delta \xi)|_{SE} \phi_S + (\sqrt{\gamma} \Delta \xi)|_S \phi_{SE}]}{[(\sqrt{\gamma} \Delta \xi)|_S + (\sqrt{\gamma} \Delta \xi)|_{SE}]} \right\} + \frac{2 C_{1e} (\phi_E - \phi_P)}{\Gamma_e \phi \sqrt{\alpha_e} (\Delta \xi_P + \Delta \xi_E)} \quad (162)
\end{aligned}$$

Expressões análogas às obtidas para avaliação da variável ϕ e de sua derivada normal à face leste do volume de controle centrado em P são obtidas para as faces n, s e w deste volume de controle e apresentadas nos APÊNDICES A e B, deste trabalho.

Substituindo-se as expressões para avaliação da variável ϕ e de sua derivada normal às faces n, s, w e e do volume de controle centrado em P na equação (107), e fazendo-se θ igual à unidade, para a formulação totalmente implícita, obtém-se

$$\begin{aligned}
a_P \phi_P &= a_{PP}^0 \phi_P^0 + (a_e^0)^* \phi_e^0 + (a_w^0)^* \phi_w^0 + \\
&+ (a_n^0)^* \phi_n^0 + (a_s^0)^* \phi_s^0 + a_e \phi_E + a_w \phi_W + a_n \phi_N + \\
&+ a_s \phi_S + a_{ne} \phi_{NE} + a_{nw} \phi_{NW} + a_{se} \phi_{SE} + a_{sw} \phi_{SW} + b_P^\phi - L[P_P^\phi] \quad (163)
\end{aligned}$$

onde os coeficientes a_P , a_P^0 , $(a_e^0)^*$, $(a_w^0)^*$, $(a_s^0)^*$, $(a_n^0)^*$, a_e , a_n , a_w , a_s , a_{ne} , a_{nw} , a_{se} , a_{sw} , $L[P_P^\phi]$ e b_P^ϕ estão definidos no APÊNDICE C, deste trabalho.

É notado que a pressão aparece tanto na equação da conservação da quantidade de movimento, quanto na expressão para avaliação da variável ϕ na face do volume de controle.

A presença da pressão na equação para avaliação da variável ϕ nas faces de volume de controle é essencial para o sucesso da predição do escoamento de fluidos, através da utilização do esquema utilizando variáveis co-localizadas.

CAPÍTULO 4

MÉTODO DE SOLUÇÃO

Para a obtenção da solução das equações de conservação apresentadas no CAPÍTULO 3, deste trabalho, é necessário o tratamento do acoplamento pressão-velocidade e aplicação das condições de contorno que serão apresentados a seguir.

4.1 - TRATAMENTO DO ACOPLAMENTO PRESSÃO-VELOCIDADE

A equação (163), obtida no CAPÍTULO 3 deste trabalho, pode expressar a conservação da quantidade de movimento nas direções x e y , quando ϕ for igual a u e v , respectivamente, e neste caso, o termo fonte conterá o gradiente de pressão. É necessário obter outra equação que relacione a pressão com as componentes da velocidade, para tratamento do acoplamento pressão-velocidade, utilizando a equação da conservação da massa, que contém os fluxos de massa nas faces do volume de controle, os quais, no caso do arranjo de variáveis co-localizadas, não são conhecidos. É necessário, ainda, estabelecer o algoritmo de solução.

4.1.1 - Obtenção da equação para correção da pressão

Para obtenção da equação para correção da pressão, será utilizado o método SIMPEC, proposto por Van Doormaal e Raithby [41], descrito a seguir, aplicado ao arranjo de variáveis co-localizadas.

A equação da conservação da quantidade de movimento na direção x pode

ser escrita na forma

$$a_p u_p = \sum_{nb} a_{nb} u_{NB} + b_p^u - L \left[\hat{P}_p \right]^u \quad (164)$$

Para um campo de pressão estimado, P^* , as componentes da velocidade, u^* , podem ser obtidas resolvendo-se a equação da conservação da quantidade de movimento dada por

$$a_p u_p^* = \sum_{nb} a_{nb} u_{NB}^* + b_p^u - L \left[\hat{P}_p^* \right]^u \quad (165)$$

As componentes de velocidade, u , obtidas da equação (164), utilizando o campo de pressão correto, mas normalmente desconhecido, satisfarão a equação da conservação da massa, enquanto que as componentes da velocidade u^* , obtidas da equação (165), não satisfarão a equação da conservação da massa. Logo, uma correção da pressão estimada, $P' = P - P^*$, é necessária para corrigir o campo de u^* através de $u' = u - u^*$. A relação entre P' e u' é obtida subtraindo-se a equação (165) da equação (164), obtendo-se

$$a_p u_p' = \sum_{nb} a_{nb} u_{NB}' - L \left[\hat{P}_p' \right]^u \quad (166)$$

Os campos de pressão, P , e da componente de velocidade, u , que satisfazem a equação da conservação da massa e da quantidade de movimento, na direção x , são

$$u_p = u_p^* + u_p' \quad (167)$$

$$P_p = P_p^* + P_p' \quad (168)$$

Subtraindo-se, de ambos os lados da equação (166), o termo $\sum_{nb} a_{nb} u'_p$, obtém-se

$$(a_p - \sum_{nb} a_{nb}) u'_p = \sum_{nb} a_{nb} (u'_{NB} - u'_p) - L \left[\hat{P}'_p \right]^u \quad (169)$$

No método SIMPLEC, o termo sublinhado, $\sum_{nb} a_{nb} (u'_{NB} - u'_p)$, da equação (169), é desprezado, resultando

$$u'_p = - \frac{1}{(a_p - \sum_{nb} a_{nb})} L \left[\hat{P}'_p \right]^u \quad (170)$$

ou ainda,

$$u'_p = - d_p^u L \left[\hat{P}'_p \right]^u \quad (171)$$

onde

$$d_p^u = \frac{1}{(a_p - \sum_{nb} a_{nb})} \quad (172)$$

Expressão análoga à equação (171) pode ser escrita para correção da componente da velocidade na face leste do volume de controle, u'_e ,

$$u'_e = - d_e^u L \left[\hat{P}'_e \right]^u \quad (173)$$

onde

$$d_e^u = \frac{d_P^u + d_E^u}{2} \quad (174)$$

Substituindo-se u'_e por $u_e - u_e^*$, na equação (173), obtém-se

$$u_e = u_e^* - d_e^u L[\hat{P}'_e]^u \quad (175)$$

Para a componente de velocidade, v_e , pode escrever-se que

$$v_e = v_e^* - d_e^u L[\hat{P}'_e]^v \quad (176)$$

onde os termos $L[\hat{P}'_e]^u$ e $L[\hat{P}'_e]^v$ são os termos $\hat{P}^u|_e$ e $\hat{P}^v|_e$, definidos pelas equações (A.41) e (A.42), do APÊNDICE A deste trabalho, substituindo-se a variável P por P' .

A componente contravariante da velocidade, U_e , pode ser dada por

$$U_e = U_e^* - d_e^u \left\{ L[\hat{P}'_e]^u y_{\eta}|_e - L[\hat{P}'_e]^v x_{\eta}|_e \right\} \quad (177)$$

onde

$$U_e^* = u_e^* y_{\eta}|_e - v_e^* x_{\eta}|_e \quad (178)$$

Expressões análogas às equações (175), (176), (177) e (178) podem ser escritas para as componentes contravariantes e cartesianas da velocidade, nas outras faces do volume de controle.

A equação da conservação da massa pode ser expressa como

$$(\rho U)_e - (\rho U)_w + (\rho V)_n - (\rho V)_s = 0 \quad (179)$$

Substituindo-se a equação (177), e as análogas para as outras faces, na equação (179), obtém-se a equação para correção da pressão

$$a_P^P P'_P = a_E^P P'_E + a_W^P P'_W + a_N^P P'_N + a_S^P P'_S + a_{NE}^P P'_{NE} + \\ + a_{SE}^P P'_{SE} + a_{NW}^P P'_{NW} + a_{SW}^P P'_{SW} + b^P \quad (180)$$

onde os coeficientes a_P^P , a_E^P , a_W^P , a_N^P , a_S^P , a_{NE}^P , a_{SE}^P , a_{NW}^P , a_{SW}^P e b^P estão definidos no APÊNDICE D, deste trabalho.

As componentes contravariantes estimadas do vetor velocidade nas faces do volume de controle, U_e^* , U_w^* , V_n^* e V_s^* , são determinadas utilizando-se o esquema descrito na seção 4.1.2 a seguir.

O sistema de equações lineares, obtido através da equação (180), é resolvido utilizando-se o método MSI modificado, proposto por Schneider e Zedan [42].

Substituindo-se os valores do campo de P' , calculados através da equação (180), nas equações (168), (177) e nas equações análogas para as outras faces, obtém-se o campo corrigido da pressão no centro do volume de controle e o campo corrigido das componentes contravariantes da velocidade nas faces do volume de controle.

4.1.2 - Cálculo do Fluxo de Massa nas Faces do Volume de Controle

Para o cálculo do fluxo de massa nas faces do volume de controle, presente no termo convectivo da equação de conservação de quantidade de movimento e presente também na equação da conservação da massa, será necessária a realização de interpolação uma vez que as variáveis se encontram armazenadas no centro do volume de controle e não nas faces do mesmo. No Capítulo 2 deste trabalho, foram discutidas diversas alternativas para a avaliação de tais fluxos.

A análise deste tópico será realizada para a face leste do volume de controle, ilustrado na FIGURA 9, podendo ser estendida para as faces norte, sul e oeste, de maneira análoga.

Peric et al. [33] propuseram um esquema para o cálculo do fluxo de massa nas faces do volume de controle, já descrito no CAPÍTULO 2, deste trabalho, onde é realizada uma interpolação linear entre os termos da equação de conservação de quantidade de movimento, escrita para os pontos P e E, com exceção do gradiente de pressão, que é calculado como no arranjo de variáveis desencontradas, resultando na equação (4).

A equação (4) pode se reescrita como

$$u_e = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\hat{a}_{PP} \hat{u}_P}{a_{PP}} + \frac{\hat{a}_{PE} \hat{u}_E}{a_{PE}} - \Delta y_e \left[\frac{1}{a_{PP}} + \frac{1}{a_{PE}} \right] (P_E - P_P) \right\} \quad (181)$$

onde,

$$\hat{a}_{PP} \hat{u}_P = \left[\sum_{nb} a_{nb} u_{NB} + (1 - \alpha_u) a_P u_P^0 \right]_P \quad (182)$$

e

$$\hat{a}_{PE} \hat{u}_E = \left[\sum_{nb} a_{nb} u_{NB} + (1 - \alpha_u) a_P u_P^0 \right]_E \quad (183)$$

O termo a_{PP} é o coeficiente central a_P do volume de controle P e o termo a_{PE} é o coeficiente central a_P do volume de controle E.

Majumdar [36] esclarece que a solução obtida, utilizando-se esta metodologia proposta por Peric et al. [33], é dependente do parâmetro de relaxação escolhido.

Marchi et al. [37] analisaram diferentes alternativas para avaliação do fluxo de massa nas faces do volume de controle, em coordenadas cartesianas,

e propuseram um esquema que converge para uma única solução no regime permanente, independente do passo de tempo utilizado, que pode ser dado por

$$u_e = \frac{1}{2} \left[\frac{\hat{a}_{PP} \hat{u}_P + \hat{a}_{PE} \hat{u}_E}{(\hat{a}_{PP} + \hat{a}_{PE})/2} \right] - \Delta y_e \frac{(P_E - P_P)}{(\hat{a}_{PP} + \hat{a}_{PE})/2} \quad (184)$$

ou ainda,

$$a_{Pe} u_e = \frac{\hat{a}_{PP} \hat{u}_P + \hat{a}_{PE} \hat{u}_E}{2} - \Delta y_e (P_E - P_P) \quad (185)$$

onde

$$a_{Pe} = \frac{\hat{a}_{PP} + \hat{a}_{PE}}{2} \quad (186)$$

Bortoli [43] testou este esquema em vários problemas, utilizando coordenadas generalizadas, obtendo excelentes resultados.

Em coordenadas generalizadas, utilizando-se o esquema proposto por Marchi et al. [37], pode escrever-se que

$$u_e = \frac{1}{2a_{Pe}} \left[\sum_{nb} a_{nb} u_{NB} \Big|_P + \sum_{nb} a_{nb} u_{NB} \Big|_E + b^u \Big|_P + b^u \Big|_E \right] - \frac{1}{a_{Pe}} \hat{P}^u \Big|_e \quad (187)$$

Analogamente pode ser obtida uma expressão para v na face leste do volume de controle,

$$v_e = \frac{1}{2a_{Pe}} \left[\sum_{nb} a_{nb} v_{NB} \Big|_P + \sum_{nb} a_{nb} v_{NB} \Big|_E + \hat{b}^v \Big|_P + \hat{b}^v \Big|_E \right] - \frac{1}{a_{Pe}} \hat{P}^v \Big|_e \quad (188)$$

A obtenção das componentes do vetor velocidade na face leste do volume

de controle, através das equações (187) e (188), envolve os oito pontos vizinhos ao ponto P e os oito pontos vizinhos ao ponto E, bem como, os pontos P e E, conforme ilustra a FIGURA 17.

Os coeficientes das equações que avaliam as componentes da velocidade, u e v , nas faces do volume de controle, são idênticos. Portanto, estes coeficientes serão calculados somente uma vez em cada intervalo de tempo utilizado.

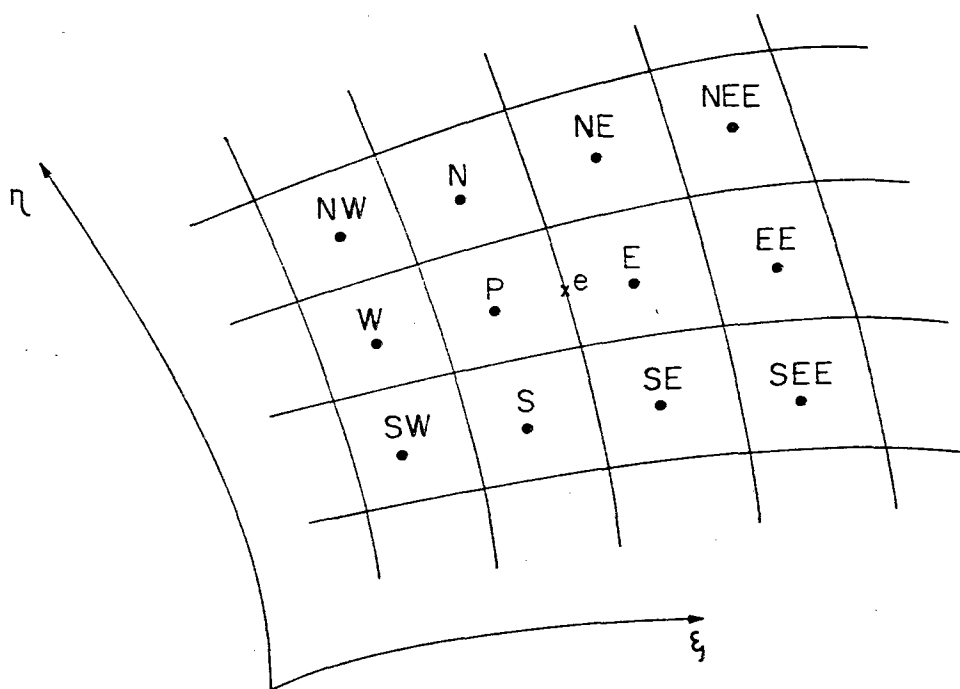


FIGURA 17 - Pontos da malha computacional envolvidos no cálculo do fluxo de massa na face leste do volume de controle.

A partir das equações (187) e (188), pode obter-se expressão para avaliação da componente contravariante da velocidade, U_e , utilizando-se a equação

$$U_e = u_e y_{\eta}|_e - v_e x_{\eta}|_e \quad (189)$$

De forma semelhante, podem ser obtidas as componentes contravariantes da velocidade nas outras faces do volume de controle.

4.2 - CONDIÇÕES DE CONTORNO

Para completar a modelagem, é necessária a especificação das condições de contorno e a implementação das mesmas de forma discretizada. A implementação das condições de contorno é uma das tarefas mais importantes a ser realizada pois é através das condições de contorno que se avança a solução em um processo iterativo. Este processo de implementação é extremamente dependente da localização das variáveis na malha computacional, uma vez que as variáveis podem estar localizadas sobre a fronteira do domínio de cálculo ou não, conforme o arranjo escolhido.

A seguir será apresentada a aplicação das condições de contorno para as componentes cartesianas da velocidade e para a pressão, no arranjo de variáveis co-localizadas.

4.2.1 - Aplicação das Condições de Contorno para as Componentes Cartesianas da Velocidade

Para a aplicação das condições de contorno para as componentes cartesianas da velocidade, optou-se pela utilização de pontos fictícios, localizados fora do domínio de cálculo, visando tratar todos os volumes de

controle do domínio através das mesmas equações.

Este tópico será exemplificado para a fronteira oeste do domínio de cálculo, ilustrado na FIGURA 18.

Se a componente da velocidade, na fronteira do domínio, for prescrita, pode escrever-se que

$$\phi_e = \frac{\phi_P + \phi_E}{2} \quad (190)$$

onde o subscrito E refere-se ao primeiro ponto do domínio depois da fronteira oeste e o subscrito P refere-se ao ponto fictício fora do domínio.

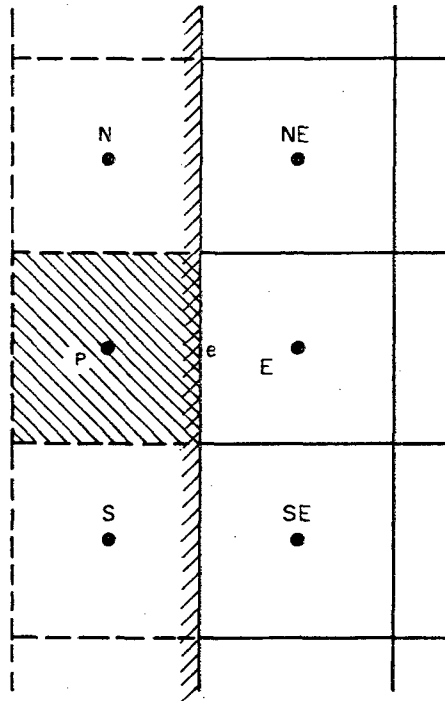


FIGURA 18 - Uso de pontos fictícios para as componentes cartesianas da velocidade na fronteira oeste.

A equação discretizada para a fronteira oeste pode ser escrita como

$$\phi_P = 2\phi_e - \phi_E \quad (191)$$

Se o gradiente da componente da velocidade, na direção normal, for nulo, pode escrever-se que

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = 0 \quad (192)$$

onde n representa a direção normal à face do volume de controle.

Utilizando-se o esquema de diferenças centrais, pode escrever-se que

$$\phi_P = \phi_E \quad (193)$$

4.2.2 - Aplicação das Condições de Contorno para a Pressão

Diversas alternativas para a avaliação da pressão nas fronteiras podem ser utilizadas, tais como, uso de pontos fictícios, extrapolação linear ou quadrática, balanço de conservação de massa em um quarto de volume de controle, conforme Schneider [35] ou uso da equação da conservação de quantidade de movimento.

Schneider e Raw [39] sugerem a utilização da interpolação linear para avaliação da pressão nas faces do volume de controle, em virtude da natureza elíptica da pressão. Desta forma, optou-se pela utilização da extrapolação linear para avaliação da pressão nas fronteiras.

Utilizando-se uma extrapolação linear, para o cálculo da pressão na face do volume de controle da fronteira leste em função do valor da pressão nos pontos P e W , conforme ilustra a FIGURA 19, obtém-se

$$P_e = \frac{3}{2} P_P - \frac{1}{2} P_W \quad (194)$$

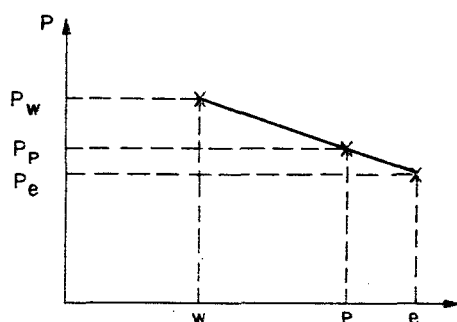
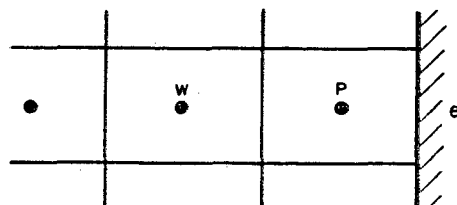


FIGURA 19 - Extrapolação linear para a pressão na fronteira leste.

Para avaliação dos gradientes de pressão nas fronteiras, que aparecem nas expressões para avaliação da variável ϕ nas faces no volume de controle, na equação de conservação de quantidade de movimento, é assumido que tais gradientes são iguais aos da face interna deste volume de controle.

Para o caso do volume de controle da fronteira leste, ilustrado na FIGURA 19, o valor de $\hat{P}^u|_e$ pode ser obtido através de

$$\begin{aligned}
 \left[\hat{P}^u|_e \right]_{\text{fronteira}} &= y_{\eta}|_e (P_P - P_W) - \\
 - \frac{y_{\xi}|_e}{2} &\left\{ \frac{(\sqrt{\gamma}_N P_{NW} + \sqrt{\gamma}_{NW} P_N)}{(\sqrt{\gamma}_N + \sqrt{\gamma}_{NW})} - \frac{(\sqrt{\gamma}_{SW} P_S + \sqrt{\gamma}_S P_{SW})}{(\sqrt{\gamma}_S + \sqrt{\gamma}_{SW})} \right\}
 \end{aligned} \tag{195}$$

Para a equação da conservação de quantidade de movimento, escrita para os volumes de fronteira, é necessária avaliação no contorno da pressão, do fluxo mássico, da variável ϕ e do gradiente da variável ϕ na direção normal ao contorno. Como já descrito, a pressão na fronteira é obtida por extrapolação linear dos pontos internos do domínio. O fluxo de massa no contorno é obtido diretamente a partir das componentes cartesianas da velocidade, respeitando-se a condição de contorno imposta. O gradiente da variável ϕ na direção normal à fronteira é calculado utilizando-se pontos fictícios, fora do domínio. A avaliação da variável ϕ na fronteira envolve pontos fictícios de ϕ , sendo que o gradiente de pressão na fronteira é tomado igual ao gradiente de pressão na face interna do volume de controle.

Na equação da conservação da massa, escrita para os volume de controle na fronteira, são utilizadas as expressões para avaliação das componentes contravariantes da velocidade nas faces no volume de controle, obtidas na seção 4.1.2 deste trabalho, sendo que o valor destas componentes na fronteira é utilizado diretamente respeitando-se a condição de contorno imposta.

A seguir serão analisados alguns detalhes numéricos do algoritmo utilizado.

4.3 - DETALHES NUMÉRICOS

A função de interpolação proposta, para avaliação das variáveis nas

faces do volume de controle e, conseqüentemente, a equação de conservação, escrita para uma variável genérica ϕ , envolvem as métricas, jacobiano e as componentes do tensor métrico, localizados nas faces, vértices e centro do volume de controle.

Desta forma, é utilizado o armazenamento do jacobiano e das componentes do tensor métrico (α , β , γ) nas faces leste e norte, no vértice nordeste e centro do volume de controle, e das métricas (x_ξ , y_ξ , x_η , y_η) nas faces leste e norte do volume de controle. Este esquema de armazenamento permite economia de memória, não ocorrendo superposição de informações geométricas.

As componentes contravariantes da velocidade são armazenadas nas faces leste e norte do volume de controle, onde são necessárias para o cálculo do fluxo de massa nas faces do volume de controle.

A solução numérica de um dado problema físico é obtida segundo um dado critério de convergência escolhido. O critério de convergência adotado neste trabalho, utilizado por Maliska [7], pode ser expresso por

$$\left| \frac{\phi^{n+1} - \phi^n}{\phi^{\max} - \phi^{\min}} \right| \leq 10^{-5} \quad (196)$$

Para os problemas de teste escolhidos, foi aplicada a tolerância para as componentes cartesianas da velocidade.

As soluções, que serão apresentadas neste trabalho, foram obtidas utilizando-se o computador IBM-3090, não vetorizado.

4.4 - PROCEDIMENTO DE SOLUÇÃO

O algoritmo empregado para a obtenção da solução de um problema hidrodinâmico, com coordenadas generalizadas, utilizando o arranjo de variáveis

co-localizadas, é o seguinte:

- 1) Leitura de dados: número de volumes, parâmetros de controle do processo iterativo, definição do escoamento e condições de contorno em cada volume das fronteiras do domínio, tratadas na seção 4.2 deste trabalho.
- 2) Estimativa dos campos de u^* , v^* e P^* .
- 3) Geração de malha usando método algébrico ou elíptico, incluindo os volumes fictícios.
- 4) Armazenamento das informações geométricas da malha: componentes do tensor métrico α , β e γ no centro, nas faces leste e norte do volume de controle, bem como, no vértice nordeste do volume de controle; métricas x_ξ , y_ξ , x_η e y_η nas faces leste e norte do volume de controle.
- 5) Cálculo de U^* e V^* com os campos estimados de u^* e v^* , e as condições de contorno para u e v .
- 6) Cálculo dos coeficientes das componentes da equação de conservação de quantidade de movimento, nos volumes fictícios com a aplicação das condições de contorno.
- 7) Cálculo dos coeficientes da equação de conservação da quantidade de movimento nas direções x e y , com os respectivos termos fontes, apresentados no APÊNDICE C deste trabalho.
- 8) Cálculo dos termos d_e^u , d_w^u , d_n^v , d_s^v , d_p^u e d_p^v , através das equações (D.12), (D.13), (D.14), (D.15), e (D.16), do APÊNDICE D deste trabalho.
- 9) Cálculo dos coeficientes da equação para P' , apresentados no APÊNDICE D deste trabalho.
- 10) Cálculo dos gradientes de pressão presentes na equação da conservação da quantidade de movimento, nas direções x e y , através das equações (C.16) e (C.17), do APÊNDICE C deste trabalho.
- 11) Solução da equação da conservação de quantidade de movimento, nas direções

x e y , apresentada no APÊNDICE C deste trabalho, utilizando-se o método MSI [42], obtendo-se u^* e v^* que não satisfazem a conservação da massa.

- 12) Cálculo de U^* e V^* nas fronteiras do domínio, de acordo com as condições de contorno para u e v .
- 13) Cálculo de U^* e V^* nas faces dos volumes de controle, através das equações (187), (188) e (189).
- 14) Cálculo do termo fonte da equação para P' , b^P , dado pela equação (D.10), do APÊNDICE D deste trabalho.
- 15) Solução da equação para P' , apresentada no APÊNDICE D deste trabalho, com o método MSI [42].
- 16) Cálculo de P , utilizando-se P^* e P' , através da equação (168).
- 17) Cálculo de U e V , utilizando-se U^* , V^* e P' , através da equação (177).
- 18) Cálculo de u e v , utilizando-se U e V corrigidas, através das equações (89) e (90).
- 19) Atualização de u^* e v^* nos volumes fictícios.
- 20) Teste de Convergência: se for satisfeito, o processo iterativo é interrompido e os resultados são impressos; caso contrário, faz-se u^* , v^* e P^* iguais aos valores recentemente calculados de u , v e P , respectivamente, retornando ao item 7.

CAPÍTULO 5

RESULTADOS

Neste capítulo, serão apresentados os problemas escolhidos para testar o esquema proposto e avaliar o seu desempenho. Foram resolvidos os problemas apresentados por Shih, Tan e Hwang [9], de convecção forçada em uma cavidade quadrada, com a presença de termos fontes na equação da conservação da quantidade de movimento, que possuem solução analítica.

Um outro problema clássico da literatura, também resolvido aqui, é o da convecção forçada em uma cavidade quadrada isotérmica, com a parede superior se movimentando com velocidade constante, que possui uma solução numérica obtida por Ghia et al. [44], com malha extremamente refinada. O problema do transporte, com convecção dominante, de um salto na variável escalar ϕ , foi resolvido, sendo que a solução analítica aproximada é apresentada por Raithby [11]. O último problema escolhido trata do escoamento isotérmico entre duas placas planas paralelas com restrição de seção, empregando-se malhas não ortogonais.

Os resultados numéricos obtidos neste trabalho serão comparados com aqueles apresentados na literatura, obtidos através de solução analítica ou através da utilização de malhas bastante refinadas.

5.1 - CAVIDADE QUADRADA COM IMPOSIÇÃO DE TERMO FONTE NA EQUAÇÃO DE CONSERVAÇÃO DE QUANTIDADE DE MOVIMENTO

Nesta seção, será avaliada a implementação da formulação proposta na

solução de problemas com termos fontes na equação da conservação da quantidade de movimento. Shih, Tan e Hwang [9] apresentam a solução analítica do problema isotérmico de convecção forçada em uma cavidade quadrada, com a imposição de dois diferentes termos fontes na equação de conservação de quantidade de movimento. Estes dois casos serão descritos e analisados a seguir.

5.1.1 - Entrada de massa no contorno superior e saída de massa no contorno direito

Shih, Tan e Hwang [9] apresentam a solução de um problema fictício de convecção forçada em uma cavidade quadrada, com comprimento unitário, cujas equações de conservação são dadas por

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{V} = 0 \quad (197)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{V}u = \frac{1}{Re} \nabla^2 u - \frac{\partial P}{\partial x} + g_1(x, y, Re) \quad (198)$$

e

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{V}v = \frac{1}{Re} \nabla^2 v - \frac{\partial P}{\partial y} + g_2(x, y, Re) \quad (199)$$

onde,

$$g_1(x, y, Re) = 4x^3y^2 + 2xy^2 - 4y/Re \quad (200)$$

e

$$g_2(x, y, Re) = 4x^2y^3 + 2x^2y + 4x/Re \quad (201)$$

As condições de contorno aplicadas para as componentes de velocidade, u e v , são dadas por

$$u(1, y) = 2y \quad (202)$$

$$u(x, 1) = 2x^2 \quad (203)$$

$$v(1, y) = -2y^2 \quad (204)$$

$$v(x, 1) = -2x \quad (205)$$

sendo que, nos contornos restantes, as componentes de velocidade, u e v , são prescritas nulas, conforme ilustra a FIGURA 20.

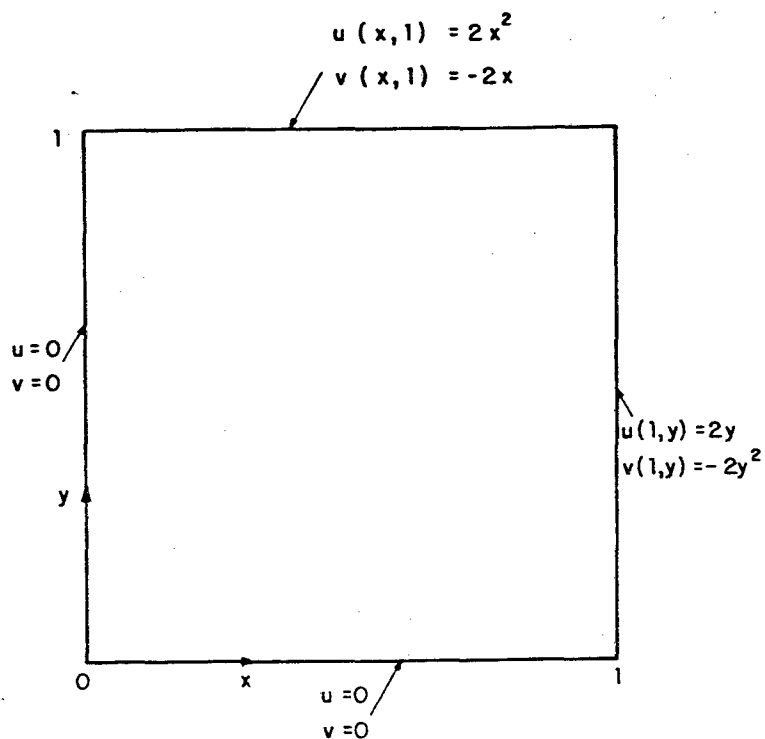


FIGURA 20 - Especificação das condições de contorno para o problema da cavidade quadrada, com entrada e saída de massa.

A solução exata deste problema, apresentada por Shih, Tan e Hwang [9], é dada por

$$u(x,y) = 2x^2y \quad (206)$$

$$v(x,y) = -2xy^2 \quad (207)$$

e

$$P(x,y) = x^2y^2 \quad (208)$$

Este problema escolhido apresenta entrada e saída de massa, sendo resolvido utilizando-se o algoritmo proposto, com malhas cartesianas 10x10 e 20x20. As linhas de corrente do escoamento, obtidas utilizando-se a formulação proposta, com malha 10x10, são ilustradas na FIGURA 21.

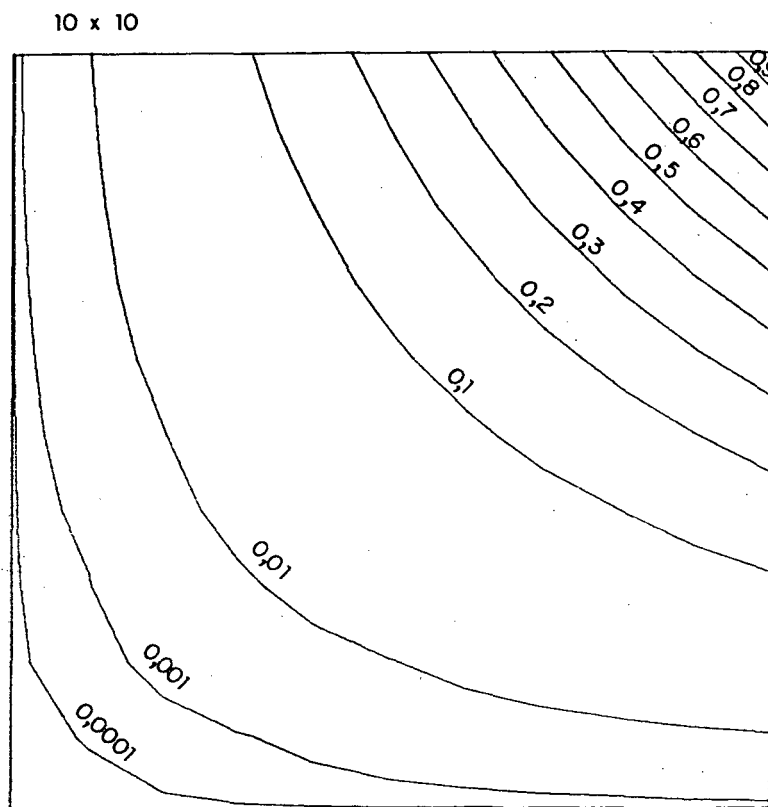


FIGURA 21 - Cavidade quadrada, com entrada e saída de massa, com malha 10x10.

O perfil da componente de velocidade, u , ao longo da diagonal que une o canto inferior esquerdo com o canto superior direito, obtido neste trabalho, com malha 10x10, é apresentado na FIGURA 22, sendo comparado com a solução exata.

Conforme se pode verificar, os resultados obtidos com a formulação proposta concordam com os resultados obtidos pela solução analítica, apresentando um erro relativo máximo de 0,3% com referência à velocidade máxima. Para malhas mais refinadas, logicamente, a solução é ainda melhor e os resultados não são apresentados.

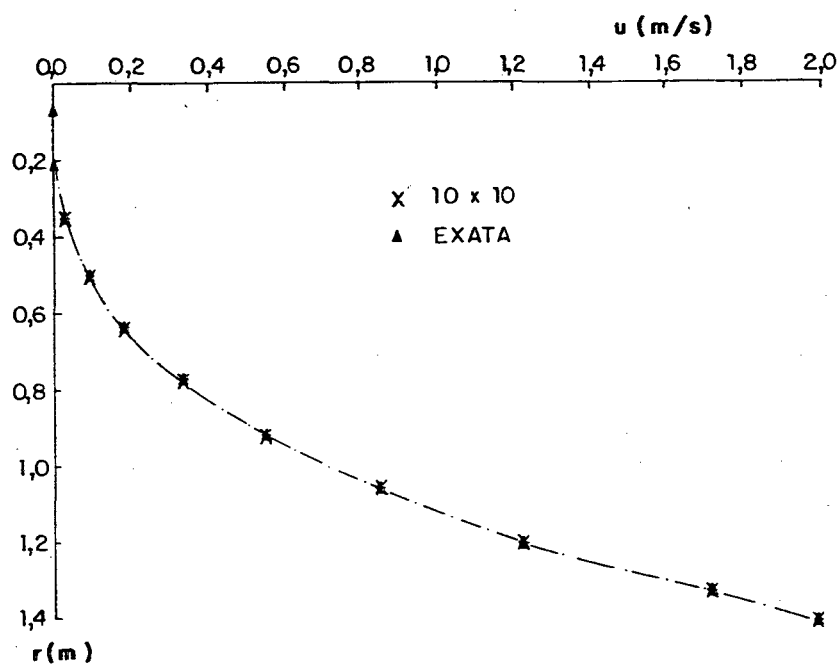


FIGURA 22 - Perfil da componente de velocidade, u , obtido ao longo da diagonal, com malha 10x10.

5.1.2 - Perfil polinomial no contorno superior

Shih, Tan e Hwang [9] apresentam também a solução de um problema de

convecção forçada em uma cavidade quadrada com comprimento unitário, com a imposição de um termo fonte adicional na componente da equação de conservação de quantidade de movimento na direção y . As equações de conservação que governam este problema são expressas por

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0 \quad (209)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} u = \frac{1}{Re} \nabla^2 u - \frac{\partial P}{\partial x} \quad (210)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} v = \frac{1}{Re} \nabla^2 v - \frac{\partial P}{\partial y} - B(x, y, Re) \quad (211)$$

As condições de contorno para as componentes de velocidade, u e v , são do tipo Dirichlet, sendo todas nulas, exceto ao longo do contorno superior, onde a componente de velocidade, u , é prescrita como

$$u(x, 1) = 16 (x^4 - 2x^3 + x^2) \quad (212)$$

conforme ilustra a FIGURA 23.

O termo B , que aparece na equação (211), pode ser expresso por

$$\begin{aligned} B(x, y, Re) = & - \frac{8}{Re} \left[24 F(x) + 2 f'(x) g''(y) + f'''(x) g(y) \right] - \\ & - 64 \left[F_2(x) G_1(y) - g(y) g'(y) F_1(x) \right] \end{aligned} \quad (213)$$

onde,

$$f(x) = x^4 - 2x^3 + 2x \quad (214)$$

$$g(y) = y^4 - y^2 \quad (215)$$

$$F(x) = \int f(x) dx = 0.2x^5 - 0.5x^4 + x^3/3 \quad (216)$$

$$F_1(x) = f(x) f''(x) - [f'(x)]^2 = -4x^6 + 12x^5 - 14x^4 + 8x^3 - 2x^2 \quad (217)$$

$$F_2(x) = \int f(x) f'(x) dx = 0.5[f(x)]^2 \quad (218)$$

$$G_1(y) = g(y) g'''(y) - g'(y)g''(y) = -24y^5 + 8y^3 - 4y \quad (219)$$

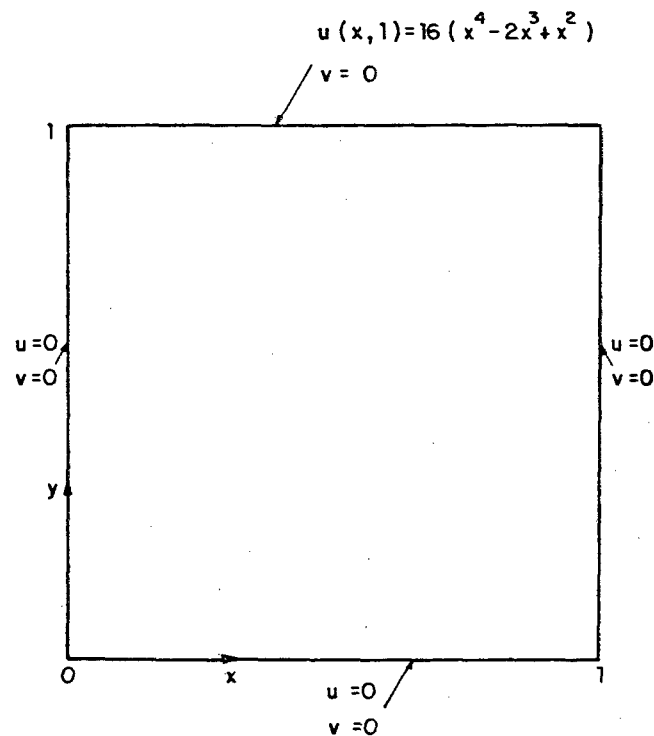


FIGURA 23 - Especificação das condições de contorno para o problema da cavidade quadrada, com perfil polinomial no contorno superior.

A solução exata deste problema é dada por

$$u(x,y) = 8f(x) \quad g'(y) = 8(x^4 - 2x^3 + x^2)(4y^3 - 2y) \quad (220)$$

$$v(x,y) = -8f'(x) \quad g(y) = -8(4x^3 - 6x^2 + 2x)(y^4 - y^2) \quad (221)$$

e

$$P(x,y,Re) = \frac{8}{Re} [F(x) g''''(y) + f'(x) g'(y)] + \\ + 64 F_2(x) \{g(y) g''(y) - [g'(y)]^2\} \quad (222)$$

A FIGURA 24 apresenta as linhas de corrente do escoamento obtidas através da utilização do esquema proposto, com malha cartesiana 10x10.

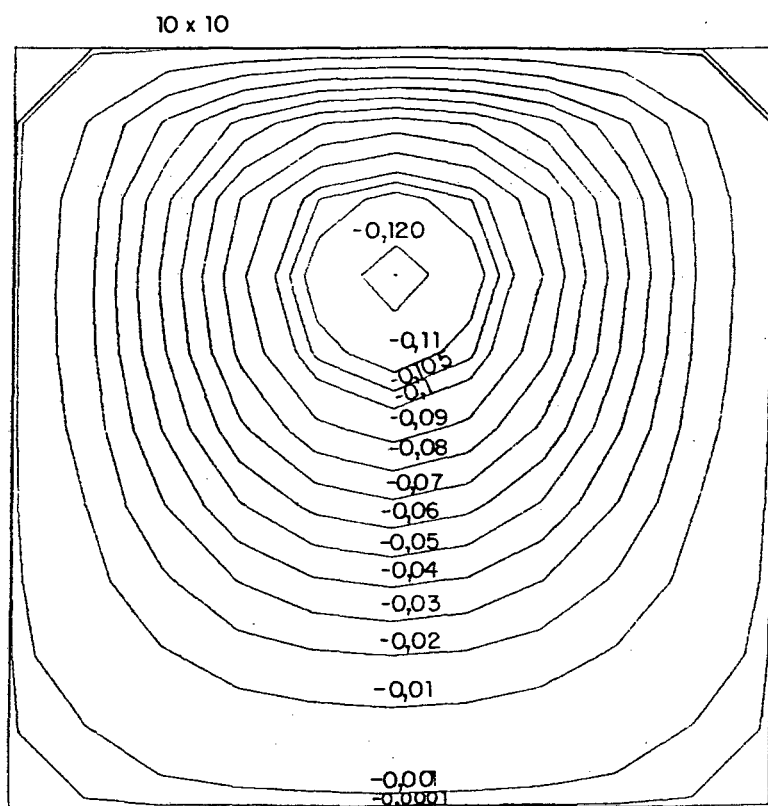


FIGURA 24 - Cavidade quadrada, com perfil polinomial no contorno superior, para malha 10x10.

Na FIGURA 25, são apresentadas as linhas de corrente do escoamento, obtidas com a utilização da formulação proposta, com malha 20x20.

O valor de ψ_{\min} apresentado por Shih, Tan e Hwang [9], para $Re = 1$, é -0,1250. O valor de ψ_{\min} obtido neste trabalho, com malhas 10x10 e 20x20 é -0,12418 e -0,12479, respectivamente, o que corresponde a um erro relativo de 0,66% e 0,17%, respectivamente.

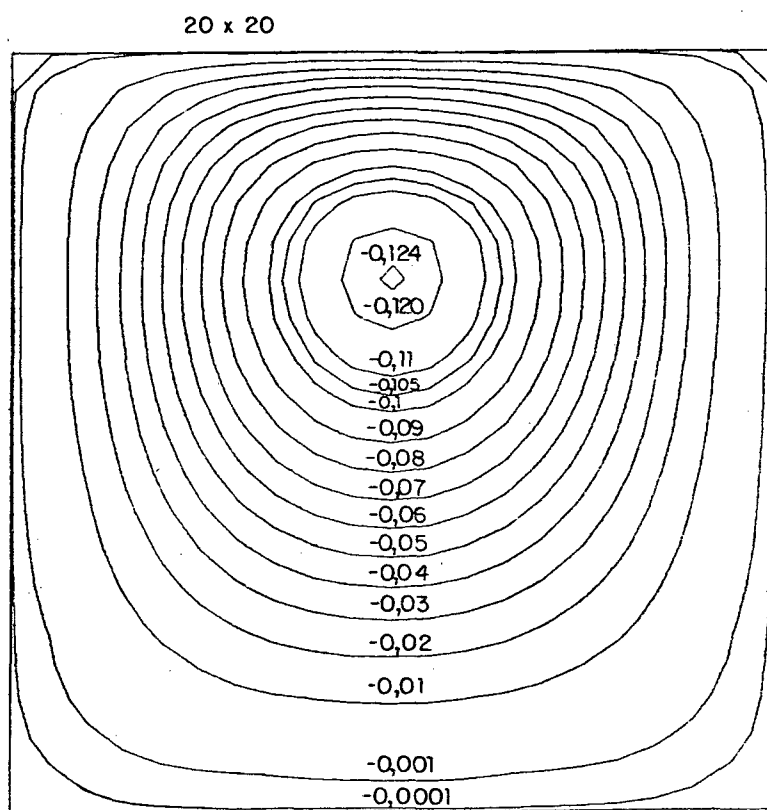


FIGURA 25 - Cavidade quadrada, com perfil polinomial no contorno superior, para malha 20x20.

A FIGURA 26 apresenta o perfil da componente de velocidade, u , ao longo da linha central vertical da cavidade, obtido neste trabalho, com malha 10x10 e o perfil exato, onde a orientação da coordenada z é contrária à coordenada y . A curva obtida com a utilização da malha 20x20 se sobrepõe à curva da solução exata. O perfil obtido com a utilização da formulação proposta, com malha 10x10 e 20x20, comparativamente à solução analítica, apresenta um erro relativo máximo de 1,6% e 0,7%, respectivamente, com referência à velocidade máxima.

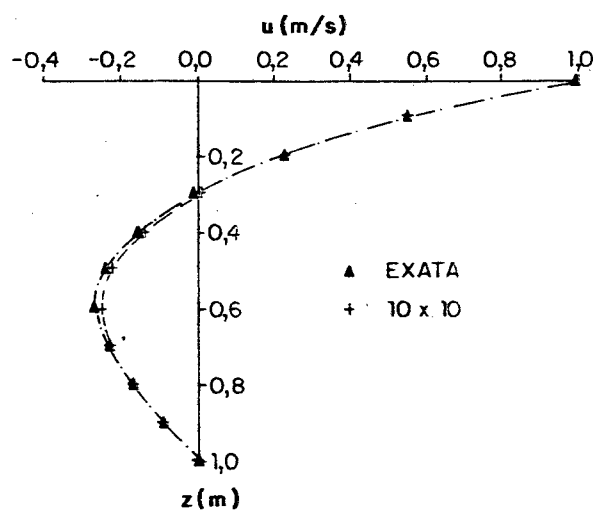


FIGURA 26 - Perfil da componente de velocidade, u , ao longo da linha central vertical, com malha 10x10.

O perfil da pressão, P , ao longo da linha central vertical da cavidade, obtido utilizando-se a metodologia proposta, com malha 10x10, é

mostrado na FIGURA 27, sendo confrontado com o perfil apresentado por Shih, Tan e Hwang [9]. A curva obtida com malha 20x20 se sobrepõe à curva da solução exata. O erro relativo máximo obtido no perfil da pressão, com a formulação proposta, com malha 10x10 e 20x20, comparativamente à solução analítica, com referência à pressão máxima, é de 1,4% e 0,7%, respectivamente.

A solução destes dois problemas, com imposição de termos fontes na equação de conservação de quantidade de movimento, permitiu comprovar que o modelo numérico implementado resolve, dentro dos erros inerentes às aproximações, as equações diferenciais governantes.

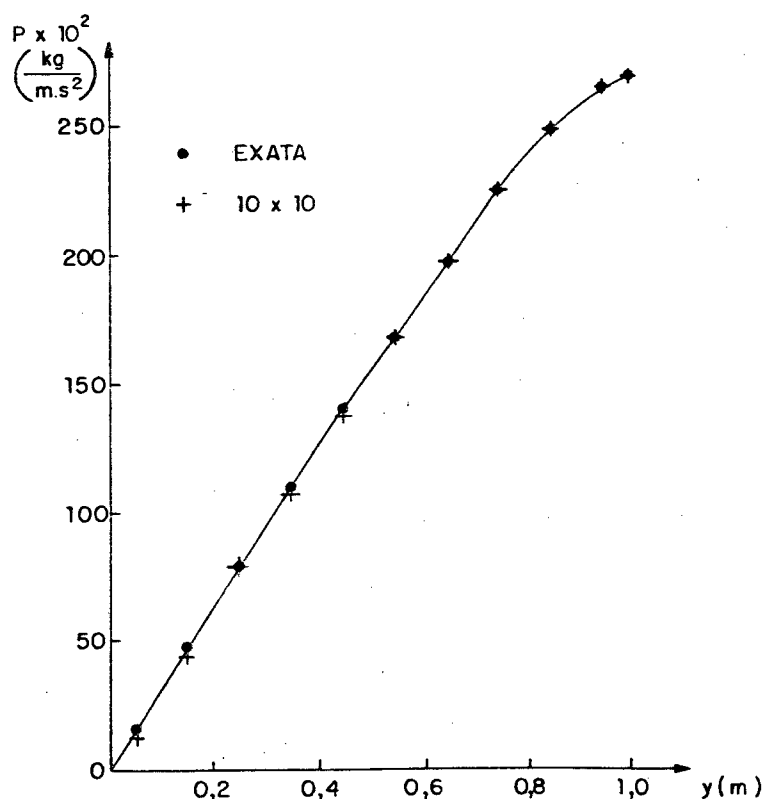


FIGURA 27 - Perfil da pressão, P , ao longo da linha central vertical, com malha 10x10

5.2 - CONVECÇÃO FORÇADA EM UMA CAVIDADE QUADRADA

O problema de convecção forçada de um fluido incompressível em uma cavidade quadrada isotérmica é resolvido para escoamento laminar, bidimensional. Este problema é bastante empregado quando métodos numéricos são avaliados e, neste caso, o problema difere da seção anterior por ter-se a velocidade da parede superior constante.

As condições de contorno prescritas são de velocidade nula, para as três paredes, duas laterais e uma inferior, sendo que a parede superior move-se com uma velocidade constante, U , conforme ilustra a FIGURA 28.

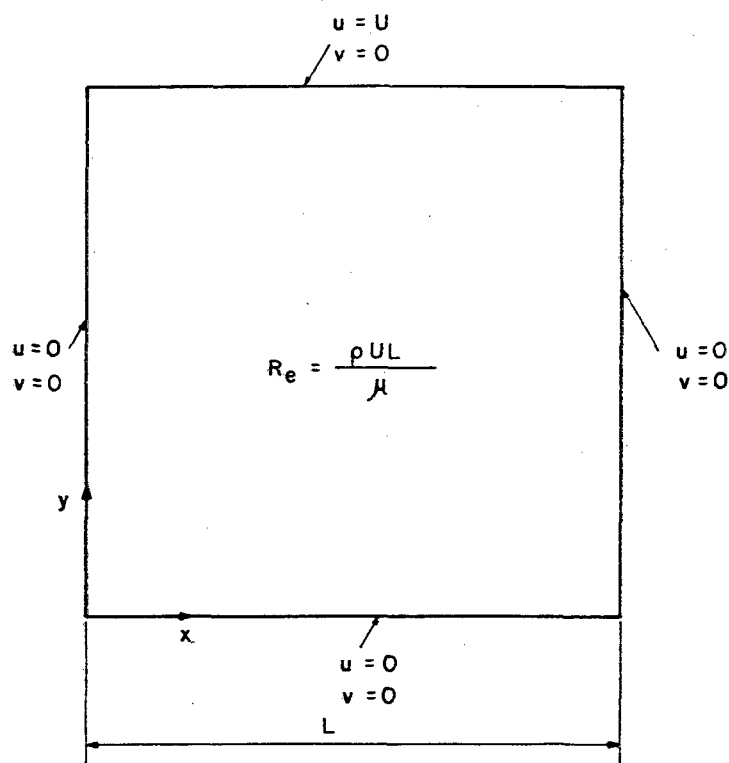


FIGURA 28 - Especificação das condições de contorno para o problema da cavidade quadrada.

A solução deste problema é dependente do número de Reynolds, podendo apresentar diversas regiões de recirculação. O número de Reynolds é calculado baseado na velocidade unitária de movimentação da parede superior (U) e no comprimento unitário da cavidade (L), ou seja, $Re = \rho UL/\mu$.

Para a obtenção da solução do problema, foram utilizadas as malhas cartesianas 10x10, 20x20, 30x30 e 40x40, para os casos de $Re = 100$, $Re = 400$ e $Re = 1000$.

Ghia et al. [44] apresentam as soluções deste problema, para diversos números de Reynolds, obtidas com malhas bastante refinadas como 129x129, para os casos de $Re = 100$ e $Re = 1000$, e 257x257, para o caso de $Re = 400$, cujas soluções são utilizadas para comparação com os resultados deste trabalho.

Os resultados obtidos com a utilização da função de interpolação completa são comparados com os obtidos com a utilização do esquema WUDS [14]. Este esquema foi o escolhido para comparações pois é um esquema bastante empregado, de fácil implementação e similar a outros bastante difundidos como, por exemplo, o exponencial [12,13].

As FIGURAS 29, 30, e 31 apresentam as linhas da corrente do escoamento, obtidas com a utilização do esquema proposto, para o caso de $Re = 100$, 400 e 1000, respectivamente, com malha cartesiana 40x40. Para o caso de $Re = 100$, o vórtice central não é circular e não está localizado no centro da cavidade, sendo que dois vórtices secundários se formam na base da cavidade. Nos casos de $Re = 400$ e 1000, o vórtice primário torna-se circular e os vórtices secundários são maiores, quando comparados com o caso de $Re = 100$.

A localização do centro dos vórtices primário, secundário esquerdo e secundário direito, obtida por Ghia et al. [44], em uma cavidade quadrada com comprimento unitário, está indicada por (*) nas FIGURAS 29, 30 e 31, para $Re = 100$, 400 e 1000, respectivamente. Conforme pode ser verificado, a localização obtida pela utilização da formulação proposta apresenta muito boa

concordância com os dados de Ghia et al. [44].

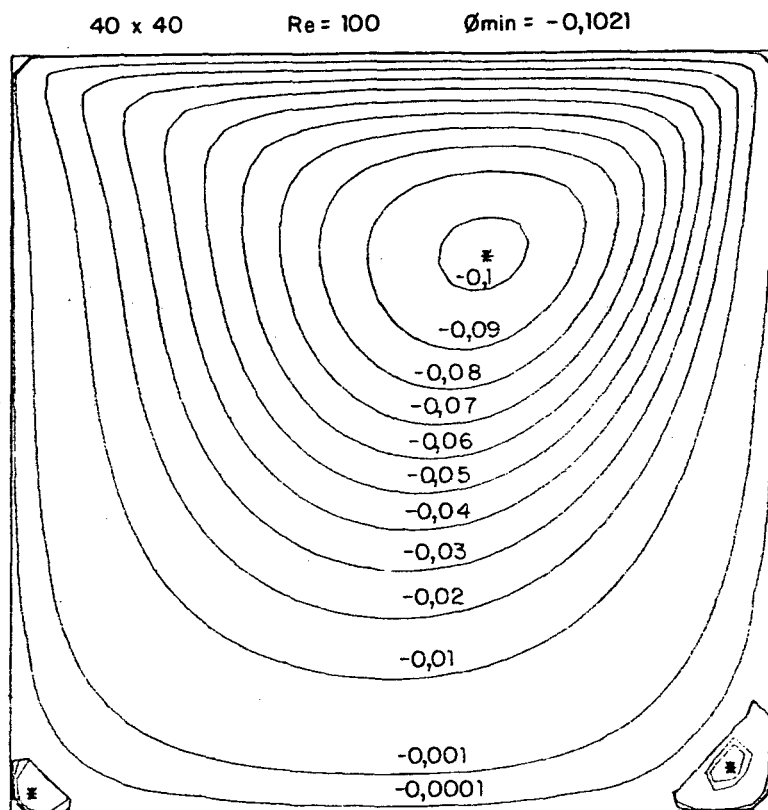


FIGURA 29 - Cavity quadrada, com $Re = 100$, malha cartesiana 40x40.

O cálculo do comprimento da região de recirculação localizada no canto inferior direito da cavidade, medido ao longo da diagonal, para $Re = 1000$, obtido pela formulação proposta e pelo esquema WUDS, apresenta um erro relativo de 2,2% e 8,7%, respectivamente, utilizando-se o comprimento desta região de recirculação obtido por Ghia et al. [44] como referência. Os resultados obtidos pela utilização do esquema WUDS apresentam um vórtice inferior direito com comprimento muito menor que o obtido por Ghia et al. [44] e o obtido neste

trabalho.

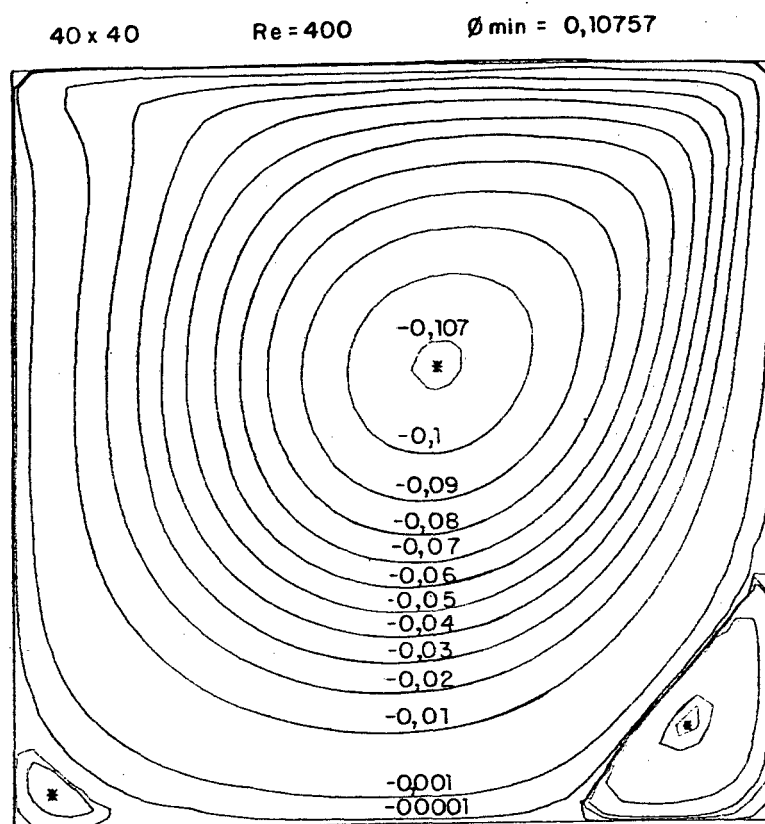


FIGURA 30 - Cavity quadrada, com $Re = 400$, malha cartesiana 40x40.

No QUADRO 2, são apresentados os valores de ψ_{\min} obtidos por Ghia et al. [44], com a utilização da função de interpolação completa e com o uso do esquema WUDS, com malha cartesiana 40x40. O erro relativo foi calculado utilizando-se os dados de Ghia et al. [44], como referência.

Conforme pode verificar-se, no caso de $Re = 100$, os erros relativos obtidos com a utilização do esquema proposto e do esquema WUDS são idênticos,

pois a difusão é dominante. Já nos casos de $Re = 400$ e 1000 , onde ocorre maior influência da convecção, os erros obtidos neste trabalho são reduzidos a menos da metade do erro obtido com o esquema WUDS.

40 x 40 $Re = 1000$ $\phi_{min} = -0,10647$

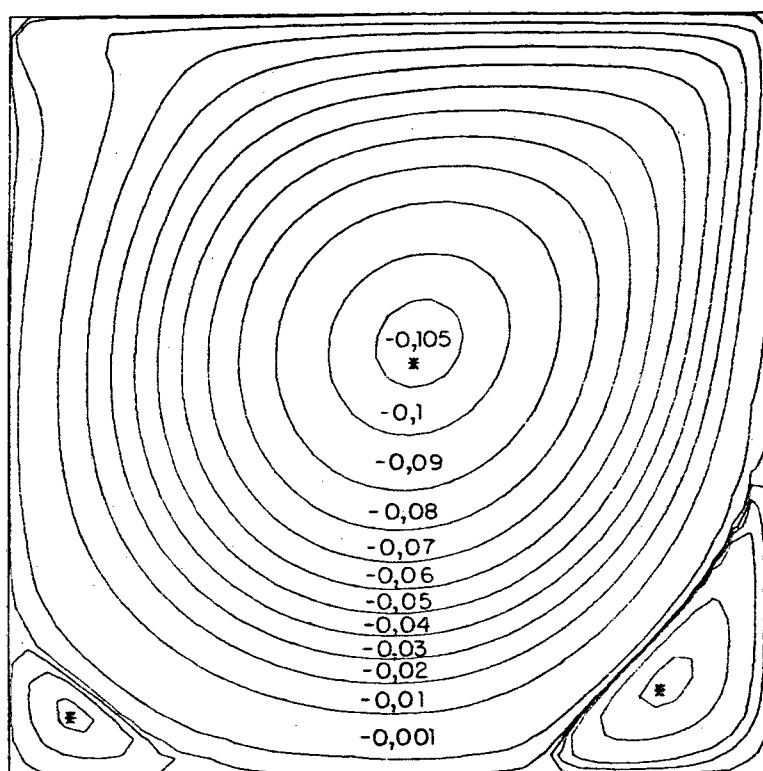


FIGURA 31 - Cavidade quadrada, com $Re = 1000$, malha cartesiana 40×40 .

Visando analisar a influência do gradiente de pressão na função de interpolação completa [45,46], é imposto o gradiente de pressão nulo na referida função de interpolação para obtenção da solução deste problema.

A FIGURA 32 apresenta o perfil da componente cartesiana da velocidade, u , ao longo da linha central vertical da cavidade, obtido com malhas cartesianas 20×20 , 30×30 e 40×40 , para o caso de $Re = 400$. Nesta figura, são

apresentados os resultados obtidos com a função de interpolação completa, com a imposição do gradiente de pressão nulo, com o esquema WUDS e os resultados obtidos por Ghia et al. [44], sendo os últimos indicados por uma linha contínua.

QUADRO 2 - Valores de ψ_{\min} obtidos por Ghia et al. [44], formulação proposta e WUDS, para os casos de $Re = 100, 400$ e 1000 .

FORMULAÇÃO	Re	ψ_{\min}	ERRO RELATIVO (%)
GHIA ET AL. [44]	100	-0,10342	PADRÃO DE COMPARAÇÃO
	400	-0,11390	
	1000	-0,11793	
FUNÇÃO DE INTER- POLAÇÃO COMPLETA MALHA 40x40	100	-0,10210	1,3
	400	-0,10757	5,5
	1000	-0,10647	9,7
WUDS MALHA 40x40	100	-0,10209	1,3
	400	-0,10119	11,2
	1000	-0,08669	26,5

Os resultados obtidos com a formulação proposta e com o esquema WUDS, para o caso de $Re = 100$, não são apresentados, em virtude de apresentarem excelente concordância com os dados de Ghia et al. [44], obtidos com malha 129×129 , pois neste caso, a difusão é dominante e as diferentes funções de interpolação apresentam baixos erros.

A FIGURA 33 apresenta o perfil da componente de velocidade, u , para o caso de $Re = 1000$, obtido com malhas cartesianas 20×20 , 30×30 e 40×40 .

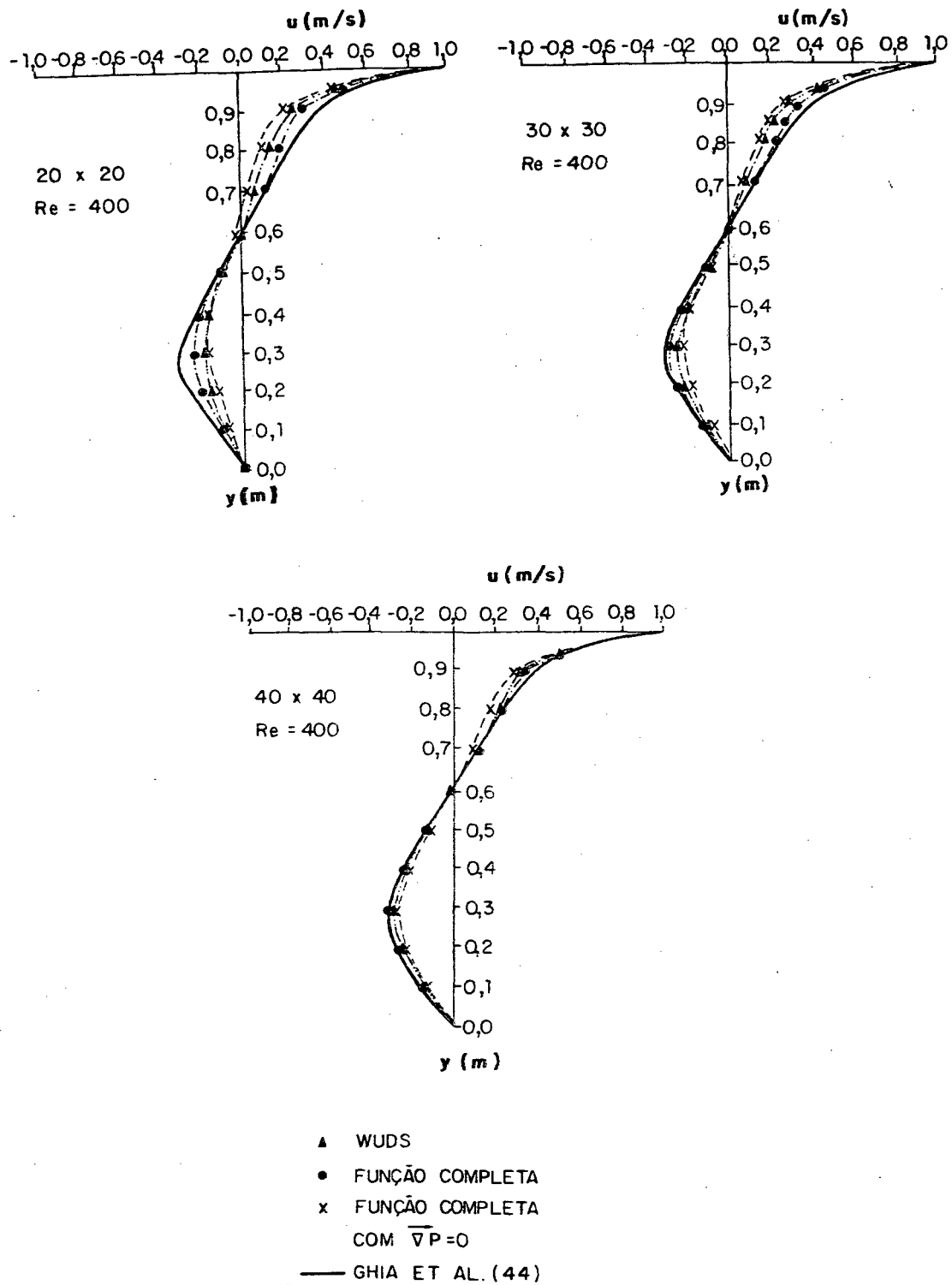


FIGURA 32 - Perfil da componente de velocidade, u , para o caso de $Re = 400$, obtido com malhas cartesianas 20x20, 30x30 e 40x40.

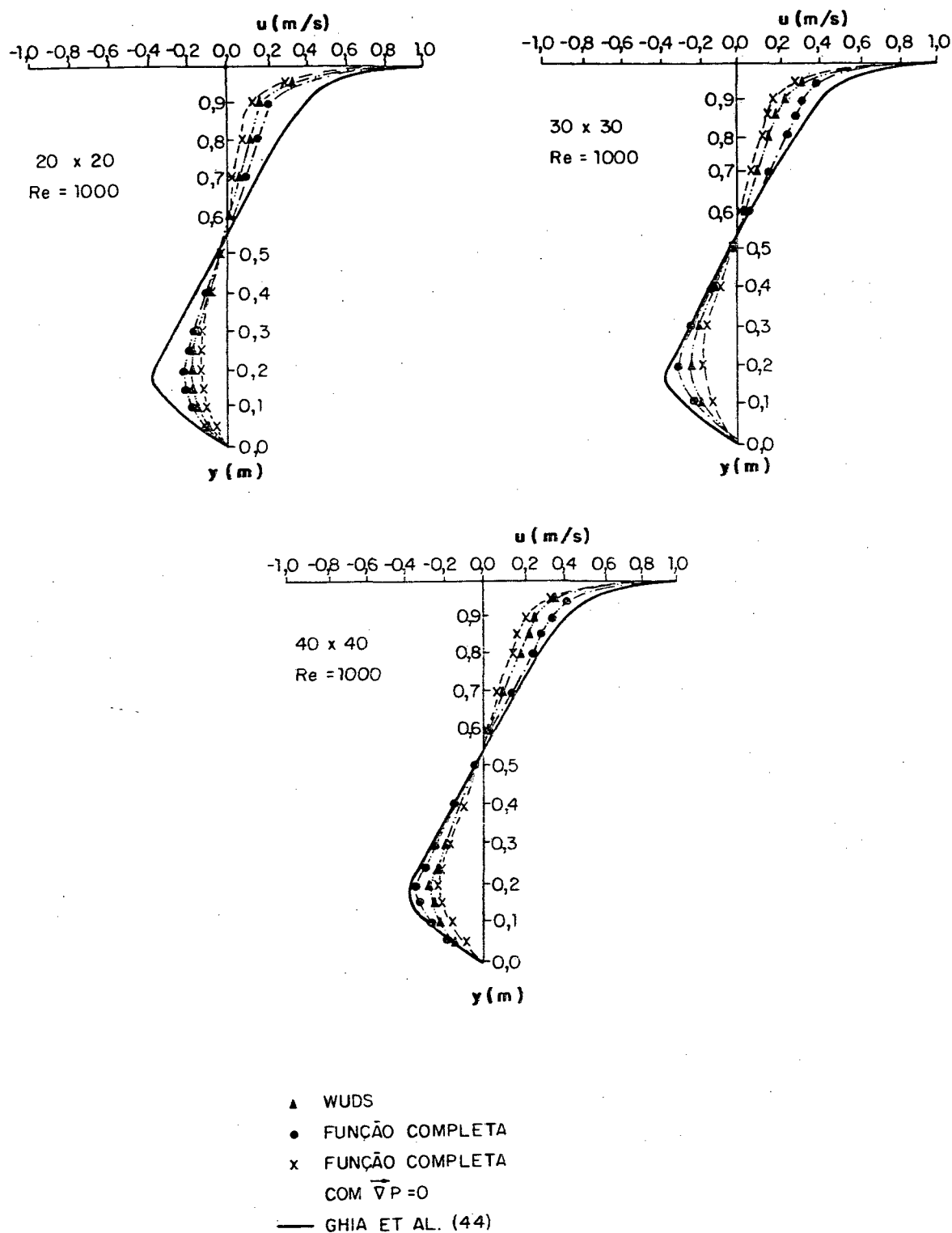


FIGURA 33 - Perfil da componente de velocidade, u , para o caso de $Re = 1000$, obtido com malhas cartesianas 20×20 , 30×30 , e 40×40 .

Nas FIGURAS 32 e 33, verifica-se que a imposição do gradiente de pressão nulo na função de interpolação completa gera perfis de u que se distanciam dos dados de Ghia et al. [44], mostrando a fundamental importância da presença do gradiente de pressão nesta função de interpolação.

O erro relativo máximo, obtido com o esquema proposto e com o esquema WUDS, é calculado com relação aos resultados obtidos por Ghia et al. [44], sendo apresentado no QUADRO 3, para os casos de $Re = 400$ e $Re = 1000$, com malhas cartesianas 10×10 , 20×20 , 30×30 e 40×40 .

QUADRO 3 - Erro relativo máximo obtido no perfil da componente cartesiana da velocidade.

ERRO RELATIVO MÁXIMO (%)			
Re	MALHA CARTESIANA	FUNÇÃO DE INTERPOLAÇÃO COMPLETA	WUDS
400	10x10	50,0	60,0
	20x20	27,0	40,0
	30x30	15,0	31,0
	40x40	15,0	23,0
1000	10x10	68,0	72,0
	20x20	46,0	56,0
	30x30	24,0	48,0
	40x40	16,0	38,0

Analisando-se as FIGURAS 32 e 33, bem como, o QUADRO 3, pode verificar-se que os resultados obtidos neste trabalho, para os casos de $Re = 400$ e $Re = 1000$, utilizando-se malhas cartesianas 20×20 , 30×30 e 40×40 , apresentam um erro relativo muito menor que o obtido pelo esquema WUDS. Esta diferença não é muito significativa no caso de malha 20×20 , onde os erros de

discretização são elevados. No caso de $Re = 1000$, malhas 30×30 e 40×40 , a utilização da função de interpolação completa faz com que o erro relativo se reduza à metade do erro relativo apresentado pelo esquema WUDS. A solução obtida com a formulação proposta, com malha 20×20 , é semelhante à solução obtida com o esquema WUDS, com malha 40×40 , para todos os casos estudados. A utilização da função de interpolação completa apresenta uma grande economia de memória e tempo computacional, considerando-se que a solução obtida pela utilização do esquema WUDS, com malhas refinadas, pode ser encontrada com a utilização do esquema proposto, com malhas menos refinadas.

Conforme ilustrado na FIGURA 33, pode ressaltar-se, ainda, que o perfil da componente de velocidade, u , obtido neste trabalho, no caso de $Re = 1000$, com malha 40×40 , apresenta muito boa concordância com o perfil obtido por Ghia et al. [44], com malha 129×129 , mostrando a eficácia da utilização da função de interpolação completa na solução deste problema.

5.3 - TRANSPORTE, COM CONVECÇÃO DOMINANTE, DE UM SALTO NA VARIÁVEL ESCALAR ϕ

Com o objetivo de analisar o desempenho da formulação proposta na solução de um problema com convecção dominante é escolhido, para análise, o caso do transporte, com velocidade uniforme, de um salto na variável escalar ϕ .

A FIGURA 34 ilustra o problema de convecção dominante no transporte da variável ϕ , em um domínio quadrado de dimensão $L = 0,5$, com número de Reynolds igual 250. A magnitude do vetor velocidade utilizada é $|\vec{V}| = 500$, a massa específica do fluido e o coeficiente de difusão Γ^ϕ são unitários, sendo esses valores também utilizados por Huget [47] para obtenção da solução deste problema. O escoamento é paralelo à linha que passa no centro do domínio, inclinada de um ângulo θ com relação à linha horizontal, conforme ilustra a FIGURA 34.

A equação de conservação que governa este problema é dada por

$$\frac{\partial}{\partial x} (\rho u \phi) + \frac{\partial}{\partial y} (\rho v \phi) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\Gamma \phi \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\Gamma \phi \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) \quad (223)$$

onde $u = |\vec{V}| \cos \theta$, $v = |\vec{V}| \sin \theta$ e ϕ representa um escalar genérico.

As condições de contorno para ϕ são especificadas como $\phi = 1$ para todas as regiões do contorno acima da linha paralela ao escoamento passando através do centro do domínio e $\phi = 0$, para as regiões abaixo desta linha. Quando a linha, que passa no centro do domínio, intercepta um ponto de ϕ , no contorno, utiliza-se $\phi = 0,5$.

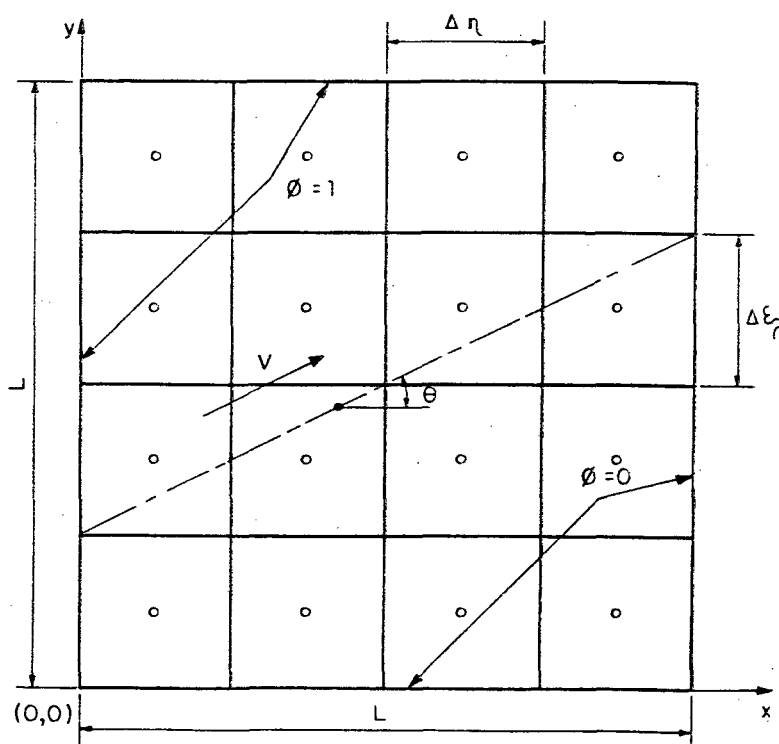


FIGURA 34 - Convecção dominante no transporte da variável ϕ , com velocidade uniforme.

Os resultados numéricos, para $x = 0,25$, são comparados com o perfil analítico aproximado, apresentado por Raithby [11], dado por

$$\phi = \frac{1}{2} \left\{ 1 + \operatorname{erf} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\rho}{\Gamma\phi} \right)^{1/2} \left(\frac{(y-y_c) u - xv}{\sqrt{(y-y_c) v + xu}} \right) \right] \right\} \quad (224)$$

onde

$$y_c = \frac{1}{4} (1 - \operatorname{tg}\theta) \quad (225)$$

Este perfil analítico aproximado apresenta um erro máximo em ϕ de 2,8%, para $x = 0,25$, para os parâmetros empregados neste problema, conforme relata Huget [47].

Quatro ângulos foram utilizados para a análise deste problema: $\theta = 0^\circ$, $\theta = 11,3^\circ$, $\theta = 30,9^\circ$ e $\theta = 45^\circ$. Quatro malhas cartesianas foram utilizadas para a obtenção da solução deste problema: 10x10, 20x20, 40x40 e 60x60.

A FIGURA 35 apresenta o perfil de ϕ obtido com a utilização da função de interpolação completa e com o esquema WUDS, para o caso de $\theta = 0^\circ$, com malhas cartesianas 10x10, 20x20 e 40x40, para $x = 0,25$. As FIGURAS 36, 37 e 38 mostram o perfil de ϕ , para o caso de $\theta = 11,3^\circ$, $30,9^\circ$ e 45° , respectivamente.

O perfil analítico aproximado, dado pelas equações (224) e (225), para $x = 0,25$, é apresentado nas FIGURAS 35, 36, 37 e 38, para o caso de $\theta = 0^\circ$, $11,3^\circ$, $30,9^\circ$, e 45° , respectivamente, através da linha contínua.

Convém salientar que alguns valores de ϕ obtidos com a utilização da formulação proposta, com malha 10x10 e 20x20, são negativos. Raw [48] também relata a obtenção de valores negativos de ϕ , na solução deste problema. Refinando-se a malha, elimina-se a ocorrência de valores negativos de ϕ .

Para análise do desempenho da formulação proposta comparado com o esquema WUDS, é calculada a inclinação das curvas obtidas em $x = 0,25$, no ponto $y = 0,25$.

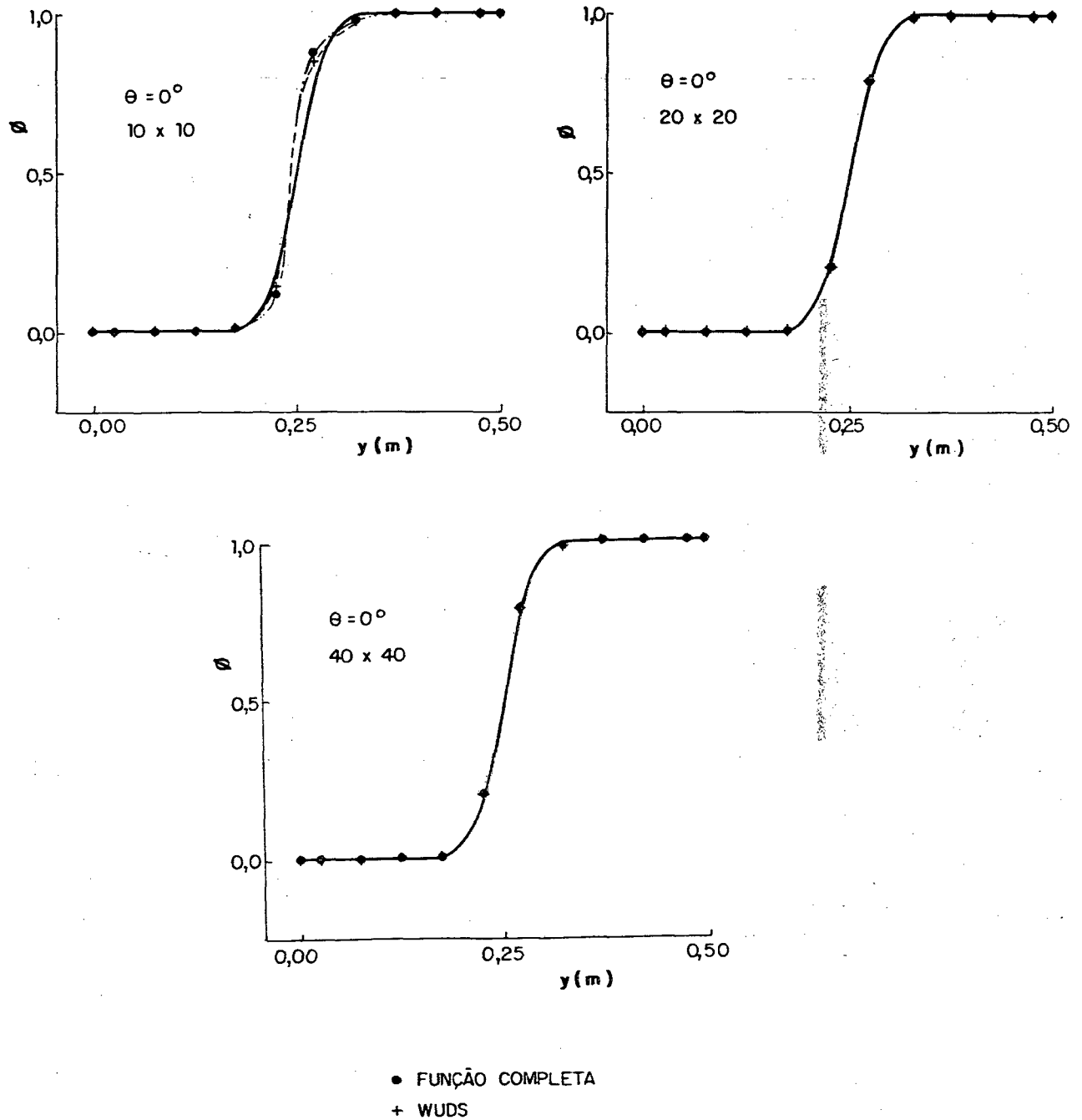


FIGURA 35 - Perfil de ϕ em $x = 0,25$, para o caso de $\theta = 0^\circ$, com malhas 10x10, 20x20 e 40x40.

O cálculo da inclinação destas curvas é utilizado para avaliar os erros de um dado esquema numérico, com relação à solução analítica aproximada apresentada por Raithby [11].

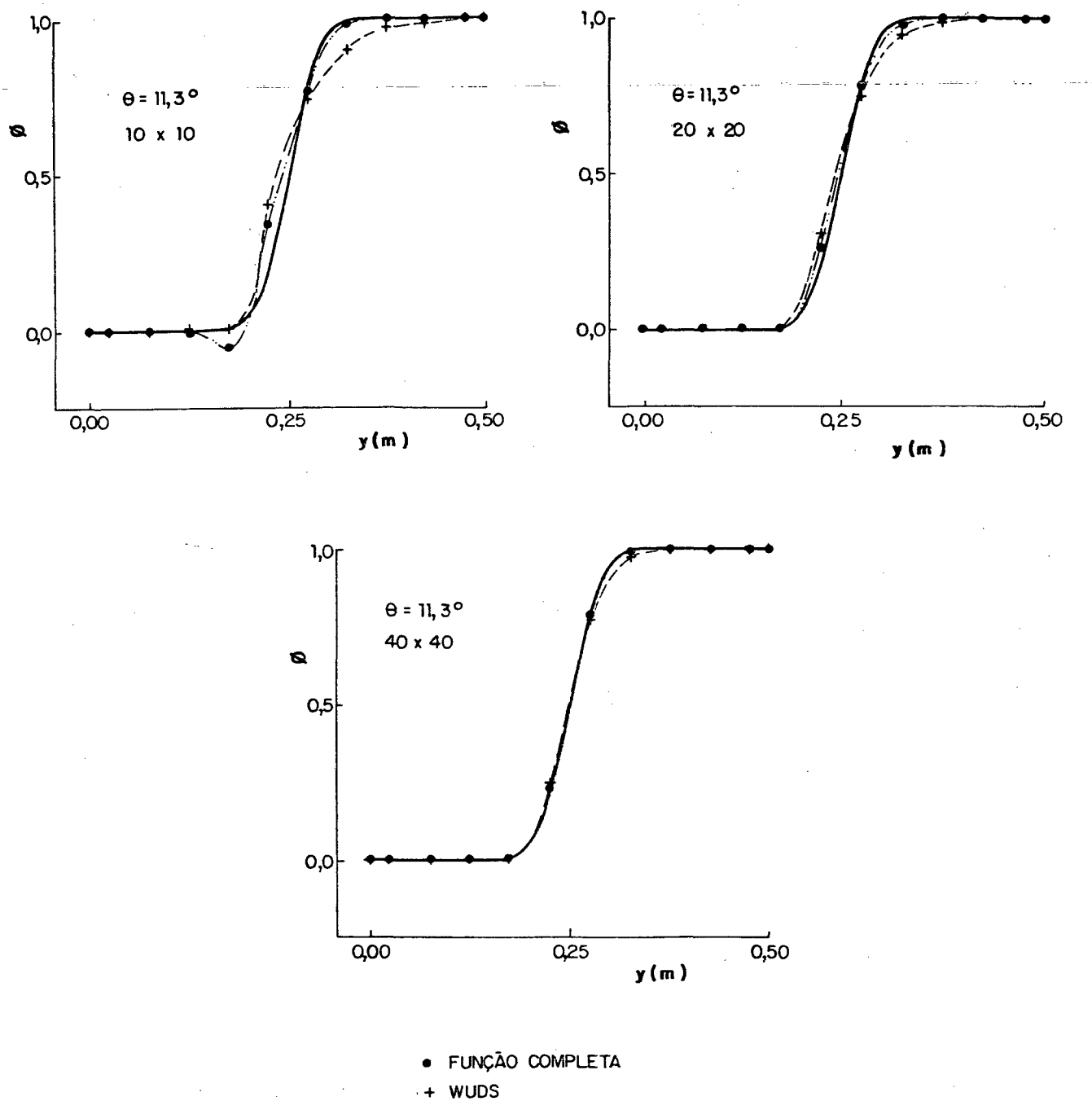


FIGURA 36 - Perfil de ϕ em $x = 0,25$, para o caso de $\theta = 11,3^\circ$, com malhas 10x10, 20x20 e 40x40.

Se a diferença entre o valor de $\left(\frac{\partial \phi}{\partial y}\right)$ em $y = 0,25$, obtido com um esquema numérico específico e o valor obtido a partir da solução analítica for elevada, pode concluir-se que altos erros devidos à difusão numérica estão presentes na solução.

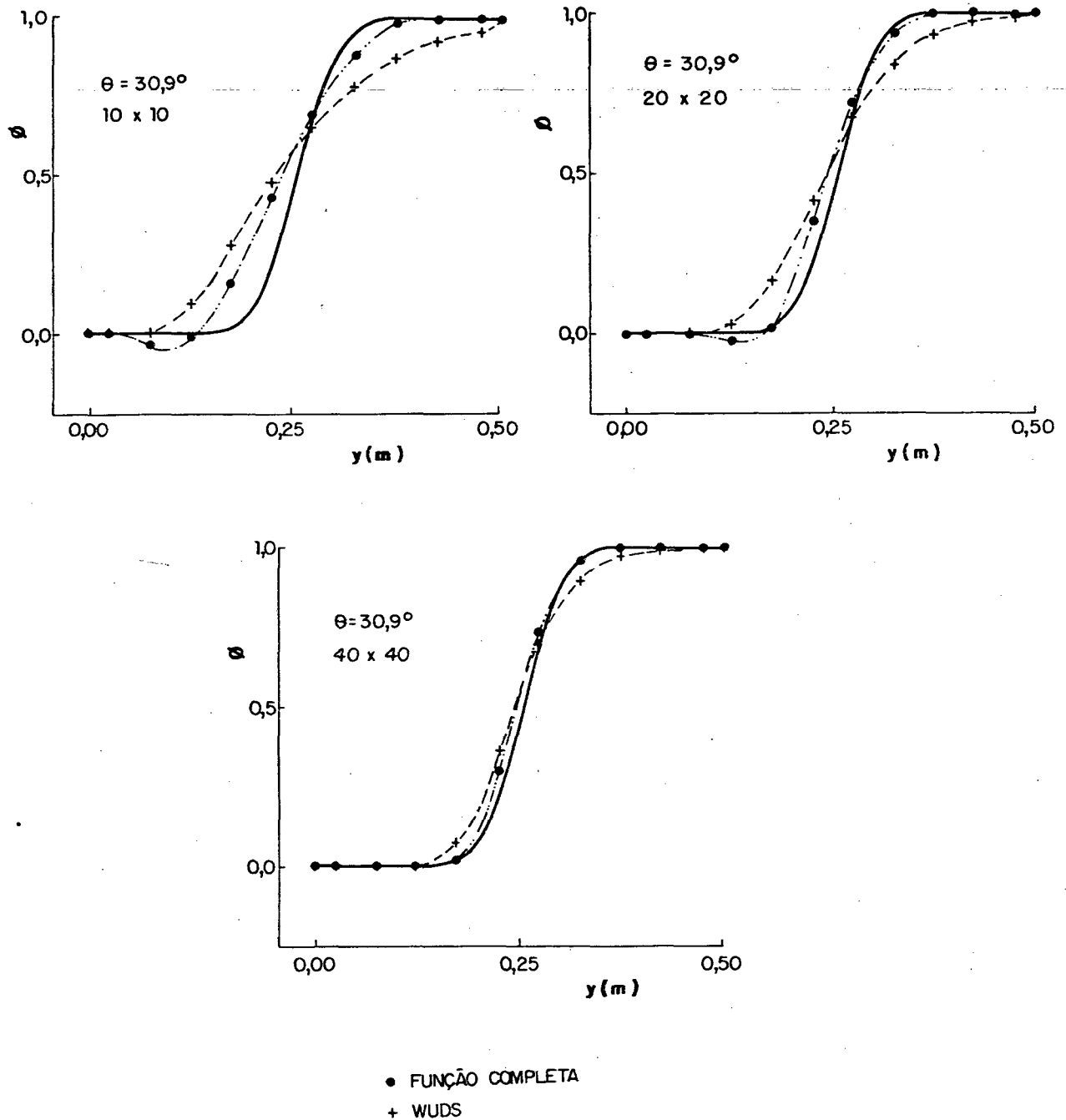


FIGURA 37 - Perfil de ϕ em $x = 0,25$, para o caso de $\theta = 30,9^\circ$, com malhas 10×10 , 20×20 e 40×40 .

A solução analítica aproximada, mostrada por Raithby [11] para $x = 0,25$, apresenta o valor para $\left(\frac{\partial \phi}{\partial y}\right)$, em $y = 0,25$, de 12,6157, 12,2502, 10,0208 e 7,5013, para os casos de $\theta = 0^\circ$, $11,3^\circ$, $30,9^\circ$ e 45° , respectivamente.

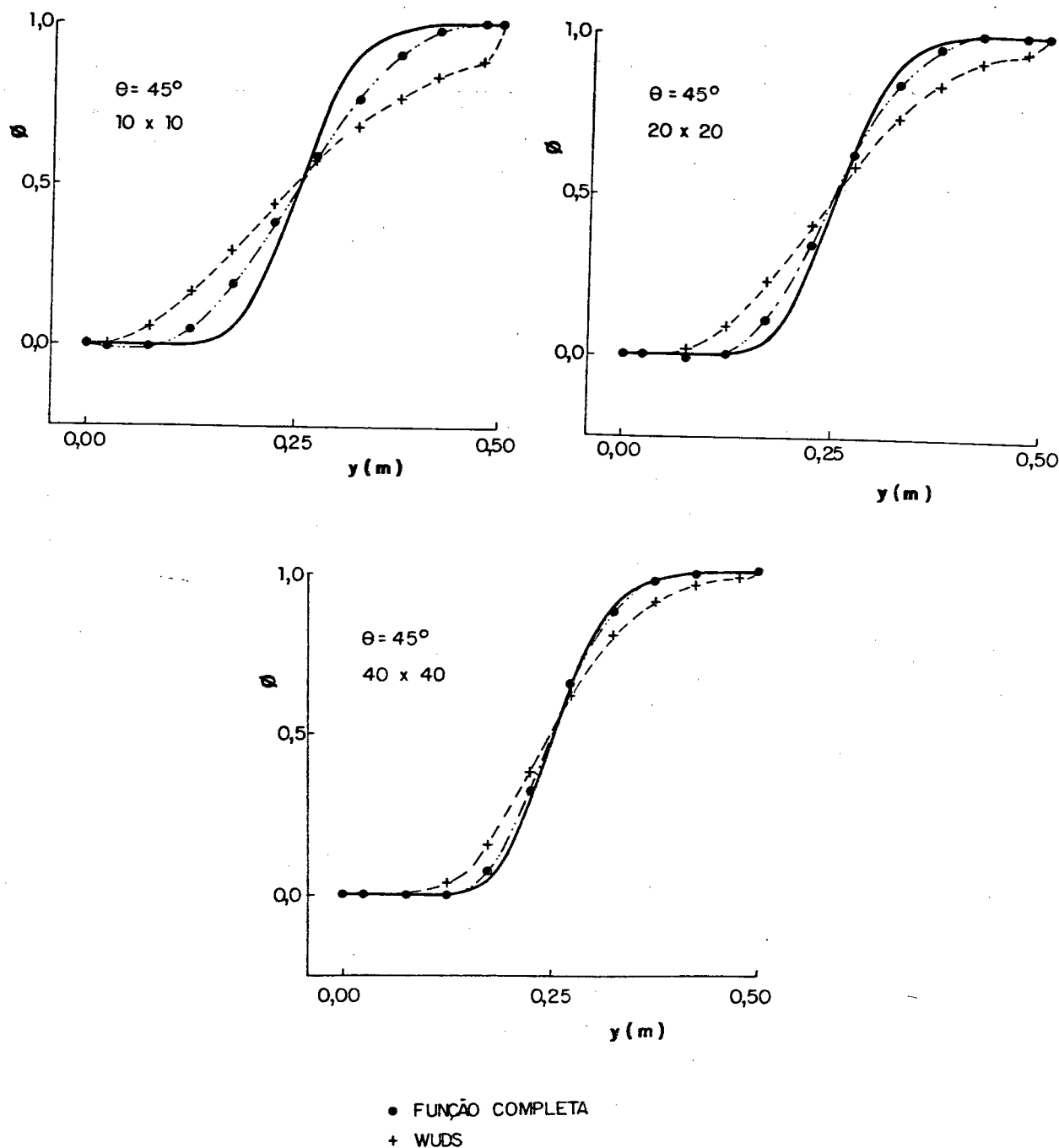


FIGURA 38 - Perfil de ϕ em $x = 0,25$, para o caso de $\theta = 45^\circ$, com malhas 10x10, 20x20 e 40x40.

O erro relativo da solução obtida com a utilização da função de interpolação completa e com o esquema WUDS, na obtenção de $\left(\frac{\partial \phi}{\partial y}\right)$, é calculado utilizando-se os valores da solução analítica aproximada, como referência, sendo apresentado no QUADRO 4, para os casos $\theta = 0^\circ$ e $11,3^\circ$.

QUADRO 4 - Erro relativo obtido com a formulação proposta e com o esquema WUDS, no cálculo de $(\partial \phi / \partial y)$, no centro do domínio, para $\theta = 0^\circ$ e $11,3^\circ$.

θ	FORMULAÇÃO	MALHA	ERRO (%) RELATIVO
0°	FUNÇÃO DE INTER- POLAÇÃO COMPLETA	10x10	21,5
		20x20	5,5
		40x40	5,5
	WUDS	10x10	14,8
		20x20	5,5
		40x40	5,5
$11,3^\circ$	FUNÇÃO DE INTER- POLAÇÃO COMPLETA	10x10	28,1
		20x20	13,1
		40x40	7,3
	WUDS	10x10	43,2
		20x20	25,8
		40x40	11,9

Analisando-se as FIGURAS 35 e 36, e o QUADRO 4, para os casos de $\theta = 0^\circ$ e $11,3^\circ$, verifica-se que os resultados obtidos com a utilização do esquema proposto e do esquema WUDS apresentam boa concordância com os resultados da solução analítica aproximada, apresentada por Raithby [11]. Isto se deve ao fato do ângulo θ ser muito baixo e, consequentemente, o vetor velocidade ser pouco inclinado com relação a malha utilizada, apresentando erro,

devido à difusão numérica, reduzido. Nos casos de $\theta = 0^\circ$ e $\theta = 11,3^\circ$, a solução obtida neste trabalho, com malha 20x20, é semelhante à solução obtida com o esquema WUDS, utilizando malha 40x40.

No QUADRO 5, é apresentado o erro relativo obtido nos casos de $\theta = 30,9^\circ$ e 45° .

QUADRO 5 - Erro relativo obtido com a formulação proposta e com o esquema WUDS, no cálculo de $\left(\frac{\partial \phi}{\partial y}\right)$, no centro do domínio, para $\theta = 30,9^\circ$ e 45° .

θ	FORMULAÇÃO	MALHA	ERRO (%) RELATIVO
$30,9^\circ$	FUNÇÃO DE INTER- POLAÇÃO COMPLETA	10x10	46,2
		20x20	23,5
		40x40	10,7
	WUDS	10x10	64,6
		20x20	47,6
		40x40	30,6
45°	FUNÇÃO DE INTER- POLAÇÃO COMPLETA	10x10	43,2
		20x20	24,3
		40x40	9,1
	WUDS	10x10	64,0
		20x20	50,8
		40x40	35,7

Para os casos de $\theta = 30,9^\circ$ e 45° , os resultados obtidos com o esquema proposto e com o esquema WUDS são apresentados nas FIGURAS 37 e 38 e no QUADRO 5. Estes dois casos representam a situação mais crítica, pois, a difusão numérica é elevada devido à grande inclinação do vetor velocidade relativamente à malha computacional. O perfil de ϕ , em $x = 0,25$, obtido com a formulação

proposta, para os casos de $\theta = 30,9^\circ$ e 45° , com malha 40×40 , aproxima-se marcadamente do perfil apresentado por Raithby [11], o que não ocorre quando o esquema WUDS é utilizado, como ilustrado nas FIGURAS 37 e 38.

Conforme se pode verificar, quanto mais refinada a malha, menor é o erro relativo com referência à solução analítica aproximada. O erro relativo obtido com a utilização da função de interpolação completa é muito menor que o obtido com o esquema WUDS, para todas as malhas utilizadas e todos valores de θ estudados. O erro relativo encontrado no cálculo de $(\partial\phi/\partial y)$, neste trabalho, com malha 20×20 , é muito menor que o obtido com o esquema WUDS, com malha 40×40 , mostrando que uma grande economia de memória computacional pode ser obtida utilizando-se a função de interpolação completa.

O perfil de ϕ obtido com a utilização da formulação proposta, com malha 60×60 , em $x = 0,25$, é coincidente com a solução analítica aproximada apresentada por Raithby [11], não sendo mostrado neste trabalho. A solução obtida com malha 60×60 será tomada como referência para avaliação da difusão da variável ϕ no domínio de cálculo, pois esta solução é idêntica às obtidas com malhas mais refinadas. A FIGURA 39 apresenta as isocurvas do campo da variável ϕ , obtidas com a utilização da função interpolação completa, com malha 10×10 , no caso $\theta = 45^\circ$. Nas FIGURAS 40, 41 e 42, são apresentadas as isocurvas do campo da variável ϕ , obtidas com malhas 20×20 , 40×40 e 60×60 , respectivamente, no caso de $\theta = 45^\circ$, ilustrando as regiões de maiores gradientes do problema.

Para análise da difusão da variável ϕ no domínio de cálculo, é medida a distância, d , em $x = 0,25$, entre $\phi = 0,1$ e $\phi = 0,9$, conforme ilustram as FIGURAS 39, 40, 41 e 42, para os casos de malha 10×10 , 20×20 , 40×40 e 60×60 , respectivamente.

Utilizando-se a distância, d , em $x = 0,25$, entre $\phi = 0,1$ e $\phi = 0,9$, obtida na FIGURA 42, com malha 60×60 , como referência, obtém-se o erro relativo apresentado no QUADRO 6, para os casos de malha 10×10 , 20×20 e 40×40 .

QUADRO 6 - Erro relativo obtido com a formulação proposta e com o esquema WUDS, no cálculo da distância entre $\phi = 0,1$ e $\phi = 0,9$, em $x = 0,25$ e $\theta = 45^\circ$.

FORMULAÇÃO	MALHA	ERRO (%) RELATIVO
FUNÇÃO DE INTER- POLAÇÃO COMPLETA	10x10	57,4
	20x20	18,0
	40x40	1,6
WUDS	10x10	162,3
	20x20	95,1
	40x40	45,9

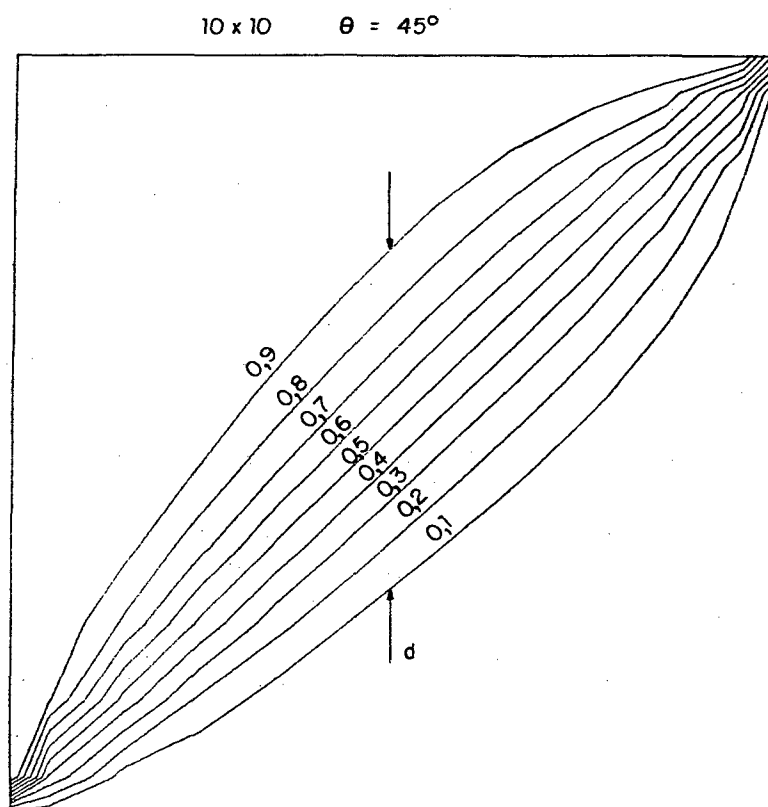


FIGURA 39 - Campo da variável ϕ , obtido com a formulação proposta, com malha 10x10, $\theta = 45^\circ$.

Pode concluir-se que se o erro relativo for elevado, menor será o gradiente da variável ϕ , em $x = 0,25$, obtido pelo esquema utilizado, em virtude da isocurvas estarem mais afastadas e, conseqüentemente, a distância d ser elevada.

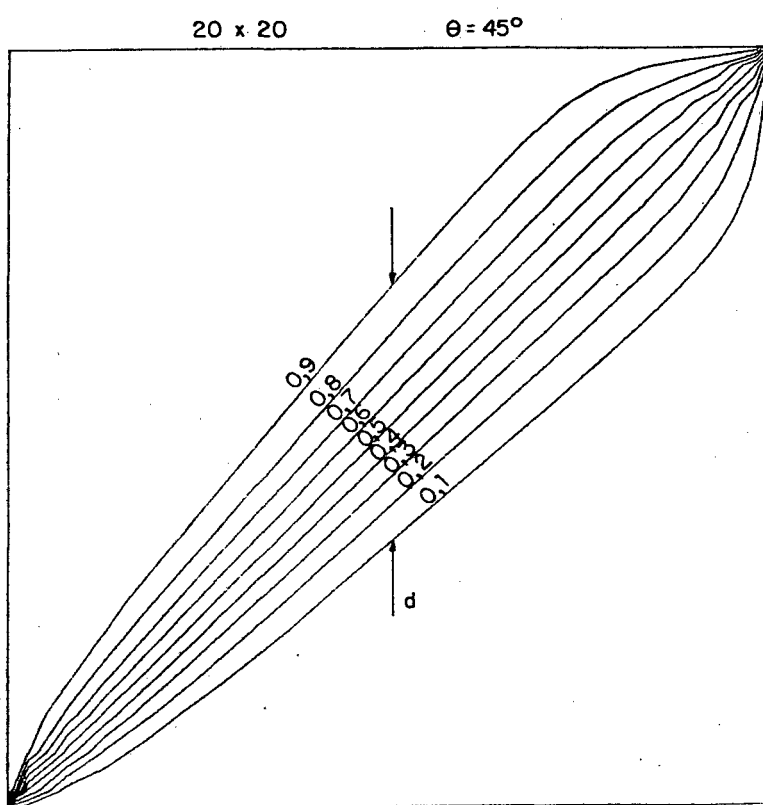


FIGURA 40 - Campo da variável ϕ , obtido com a formulação proposta, com malha 20x20, $\theta = 45^\circ$.

Conforme se pode verificar no QUADRO 6, a solução obtida neste trabalho, com malha 40x40, apresenta um erro relativo de 1,6% com relação a malha 60x60, enquanto que a solução obtida com o esquema WUDS, malha 40x40, apresenta um erro relativo de 45,9%. A solução obtida utilizando-se o esquema WUDS, com malha 40x40, mostra uma região de difusão da variável ϕ muito maior do que a obtida com malha bastante refinada, indicando que grandes erros de difusão numérica estão presentes.

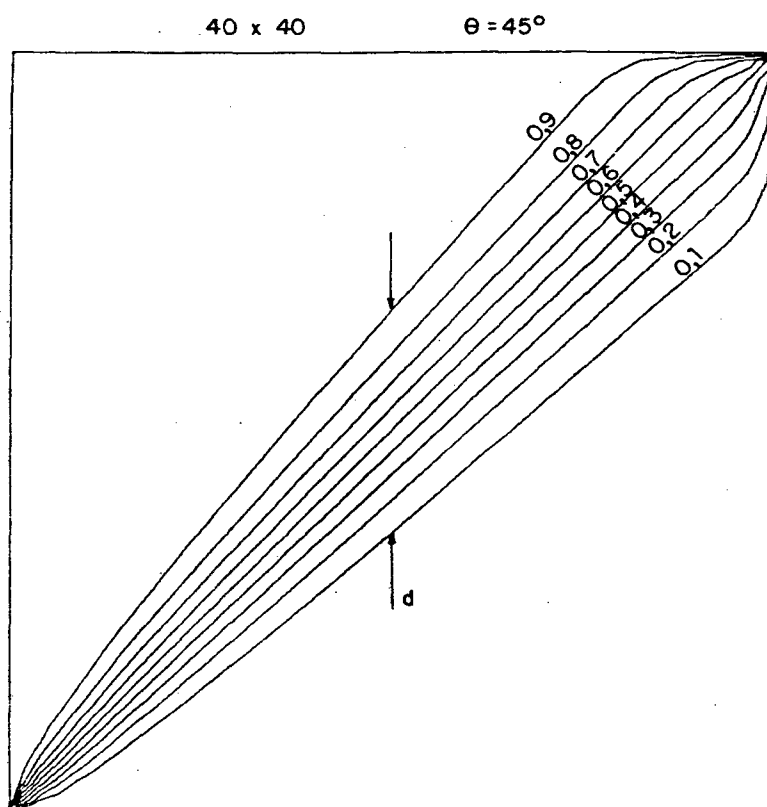


FIGURA 41 - Campo da variável ϕ , obtido com a formulação proposta, com malha 40x40, $\theta = 45^\circ$.

O erro relativo obtido com a utilização da formulação proposta, malha 20x20, é mais baixo que o obtido com o esquema WUDS, malha 40x40, mostrando, novamente, a grande economia de memória computacional, possível de se obter quando a função de interpolação completa é empregada.

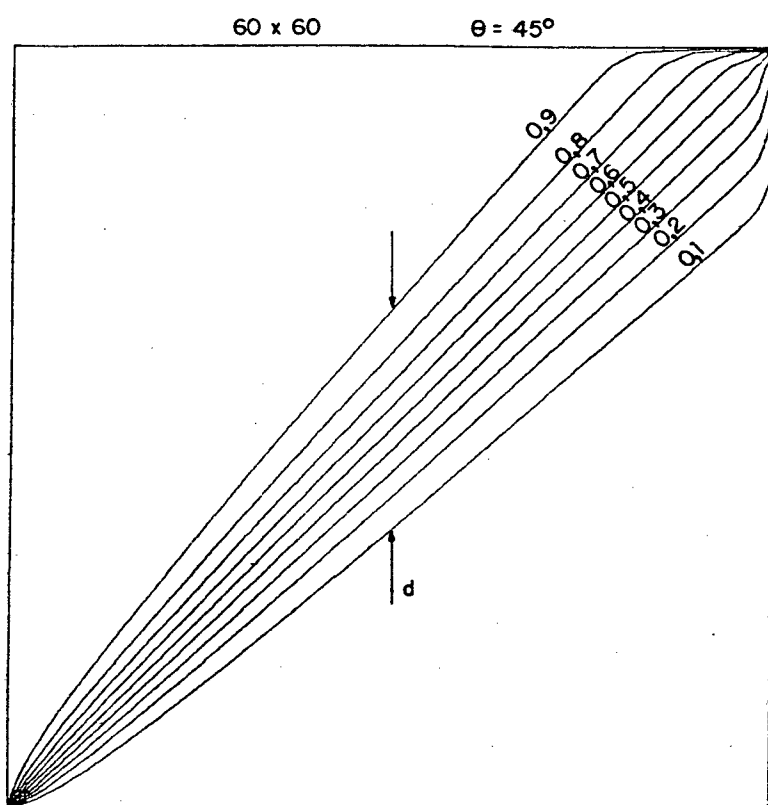


FIGURA 42 - Campo da variável ϕ , obtido com a formulação proposta, com malha 60x60, $\theta = 45^\circ$.

Convém salientar que para todos os ângulos e malhas investigados neste problema, não houve uma diferença significativa no tempo computacional requerido para obtenção da solução utilizando-se o esquema proposto e o esquema WUDS.

5.4 - ESCOAMENTO ENTRE DUAS PLACAS PLANAS PARALELAS COM RESTRIÇÃO DE SEÇÃO

Os testes até agora realizados empregaram malhas cartesianas. Como os desenvolvimentos aqui apresentados estão no contexto de coordenadas não ortogonais, é importante obter a solução de um problema utilizando uma malha não ortogonal. O problema escolhido foi o do escoamento isotérmico, bidimensional de um fluido incompressível entre duas placas planas paralelas com restrição de seção, conforme mostra a FIGURA 43.

As condições de contorno para a solução deste problema são prescritas como perfil unitário para a velocidade na seção de entrada, velocidade nula no contorno superior, condição de simetria no contorno inferior e derivada nula da velocidade na seção de saída, sendo que $L = 0,05$ m, $H = 9,55 \times 10^{-3}$ m e $h = 5,1 \times 10^{-3}$ m. Peric et al. [33] resolve um problema semelhante, utilizando estas mesmas dimensões.

Para a solução deste problema, foram utilizadas as malhas 10x30, 20x60 e 40x120, para $Re = 400$ e $Re = 1000$, sendo o número de Reynolds calculado baseado na velocidade unitária prescrita à entrada e na distância entre as duas placas ($2H$). Para a análise dos resultados obtidos, foram escolhidas as seções A-A e B-B, ilustradas na FIGURA 43.

O perfil da componente cartesiana da velocidade, u , ao longo das seções A-A e B-B, para o caso de $Re = 400$, é apresentado nas FIGURAS 44 e 45. Na FIGURA 44, são mostrados os resultados obtidos com a utilização da formulação proposta, com malhas 10x30 e 40x120, e do esquema WUDS, com malha 10x30, enquanto que, na FIGURA 45, os resultados obtidos com malha 20x60 são

confrontados com os obtidos com malha 40x120.

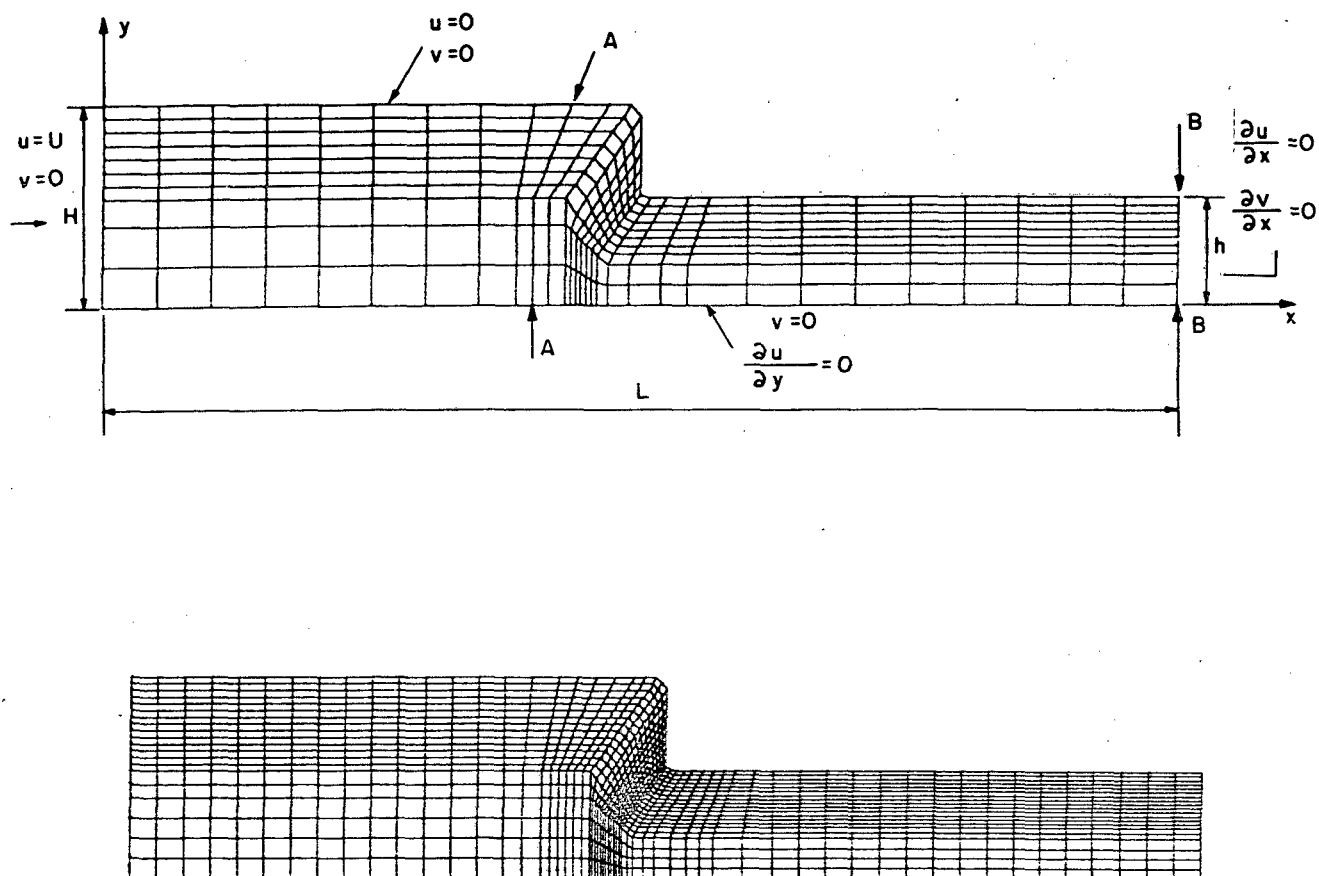


FIGURA 43 - Malhas 10x30 e 20x60, utilizadas na solução do escoamento entre duas placas planas paralelas com restrição de seção.

Os resultados obtidos com a utilização da função de interpolação completa e do esquema WUDS, com malhas 10x30 e 20x60, para o caso de $Re = 1000$, nas seções A-A e B-B, são apresentados nas FIGURAS 46 e 47, respectivamente. Para análise dos resultados, nestas figuras, é mostrada também a solução obtida com malha bastante refinada, 40x120.

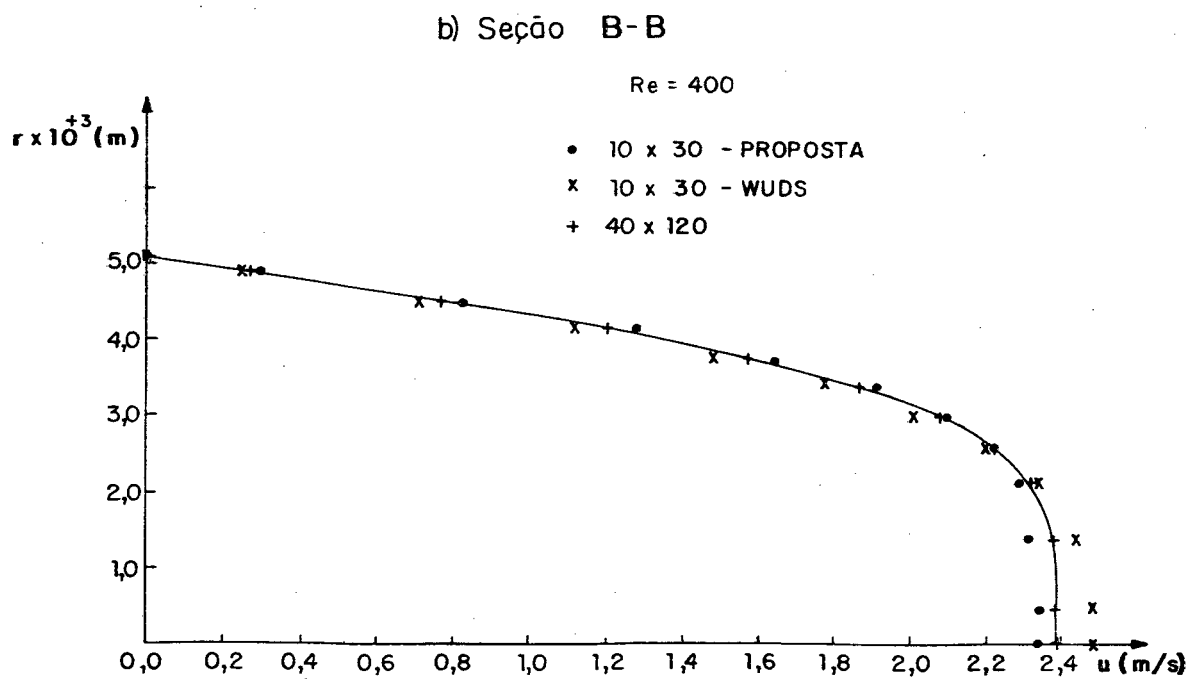
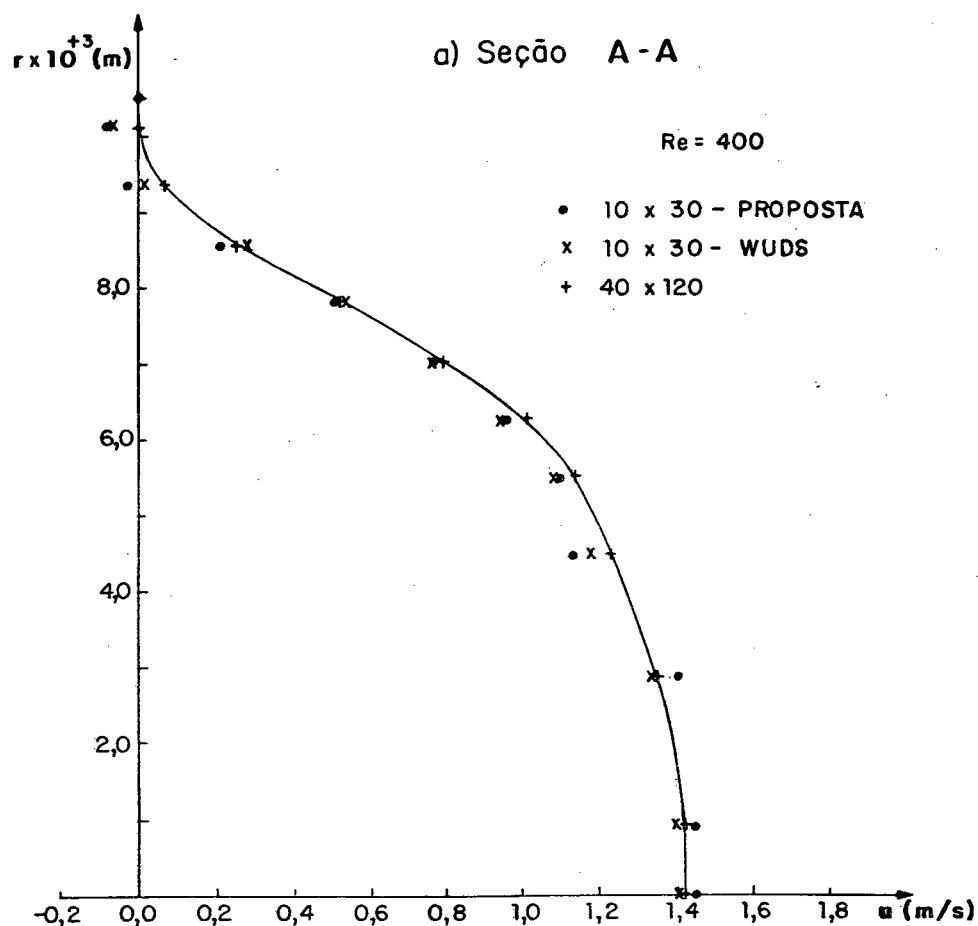


FIGURA 44 - Perfil da componente cartesiana de velocidade, u , nas seções A-A e B-B, no caso de $Re = 400$, malhas 10x30.

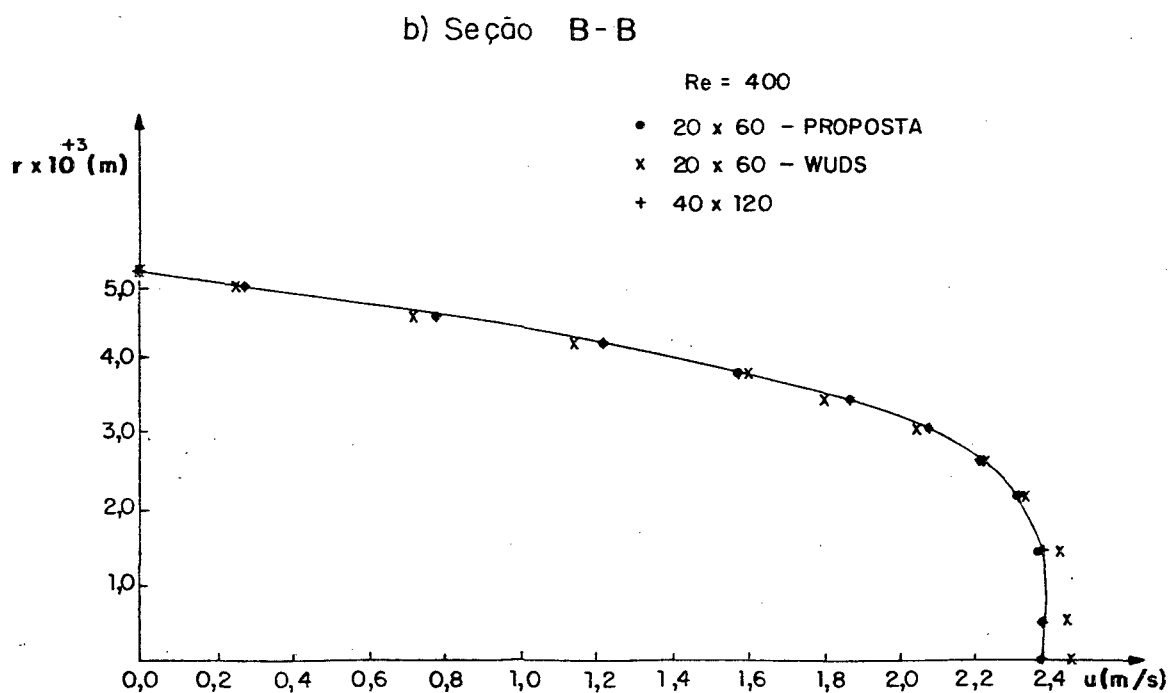
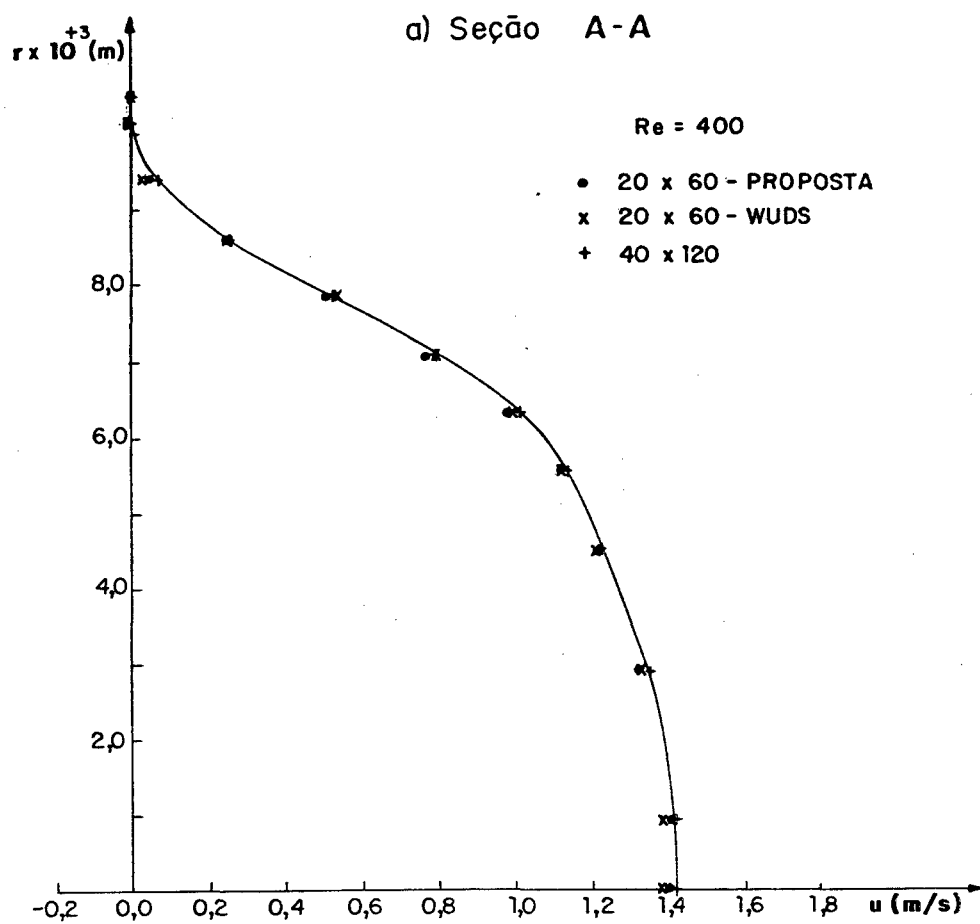


FIGURA 45 - Perfil da componente cartesiana de velocidade, u , nas seções A-A e B-B, no caso de $Re = 400$, malhas 20x60.

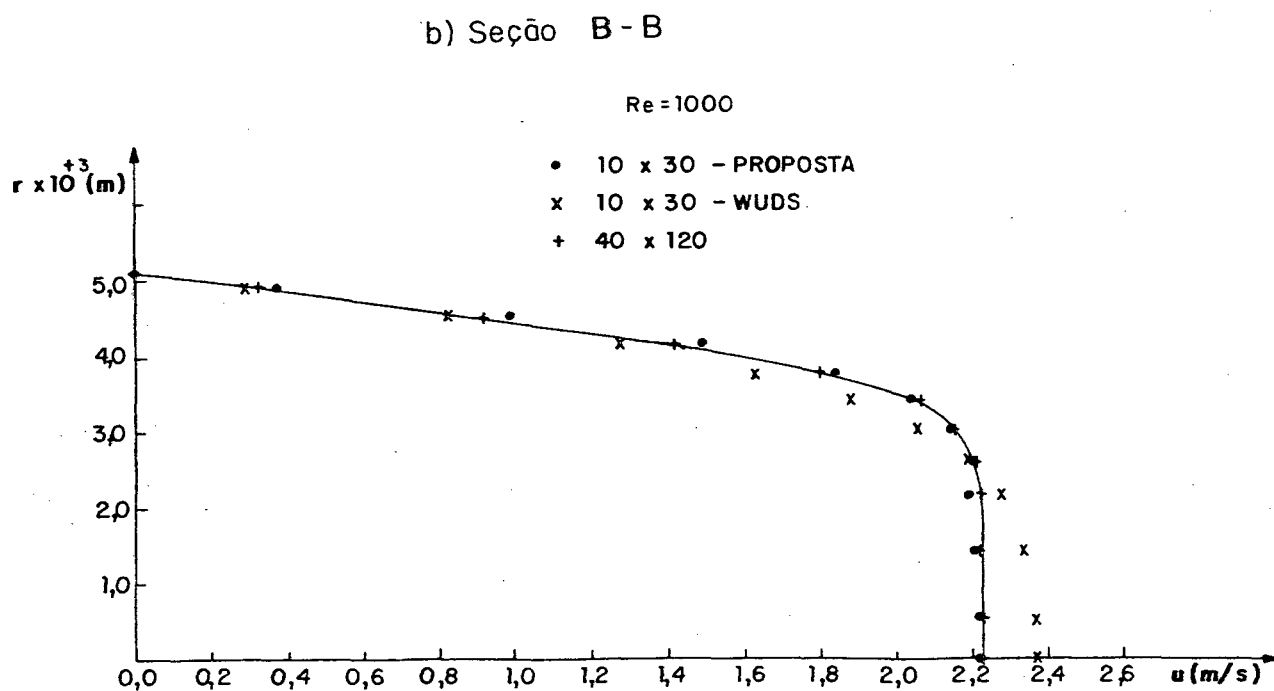
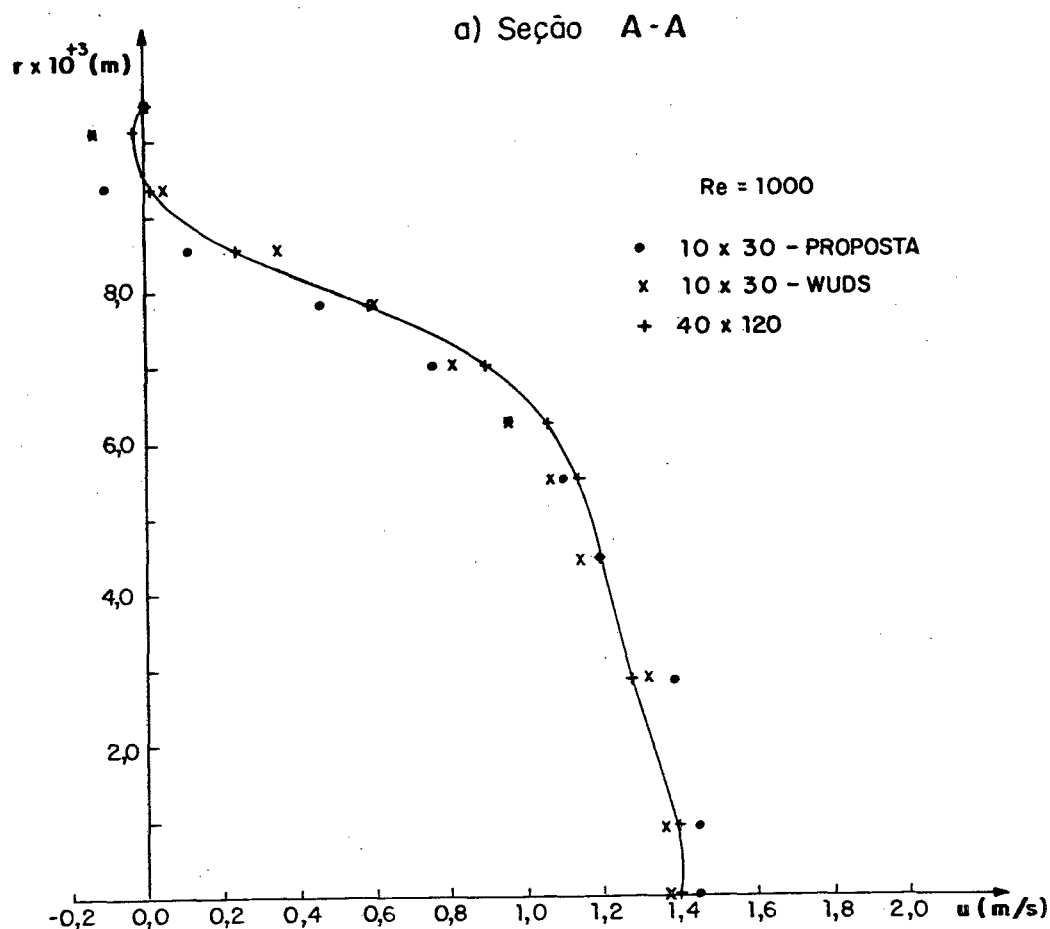


FIGURA 46 - Perfil da componente cartesiana de velocidade, u , nas seções A-A e B-B, no caso de $Re = 1000$, malhas 10x30.

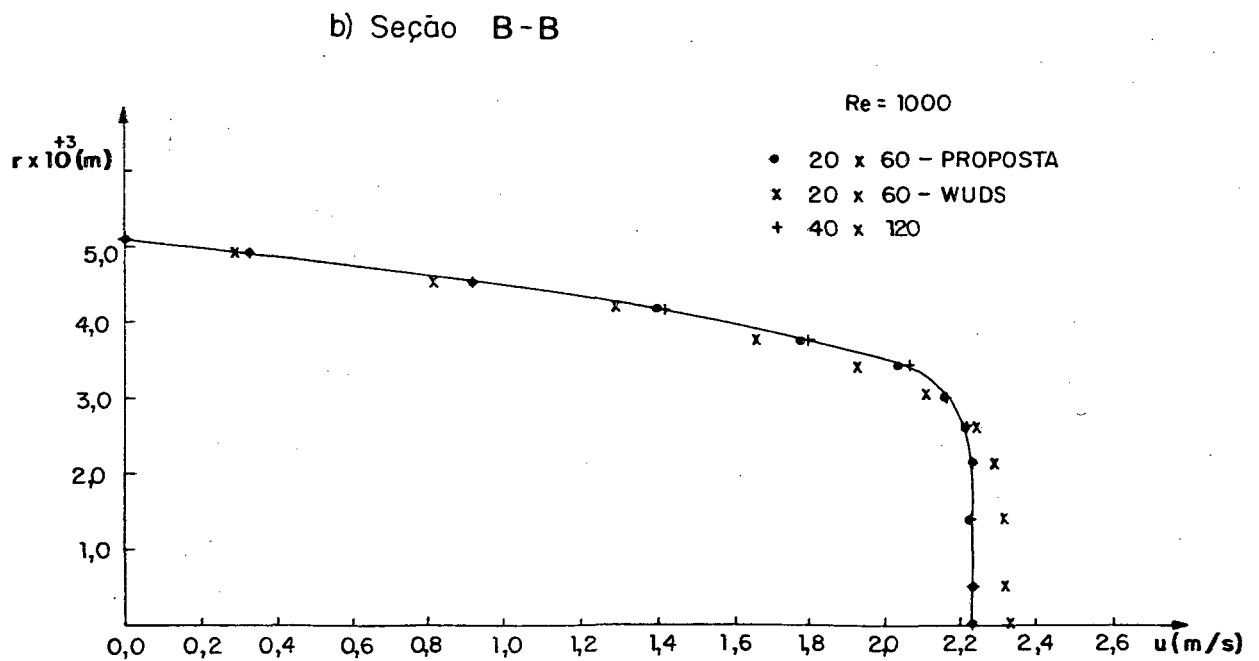
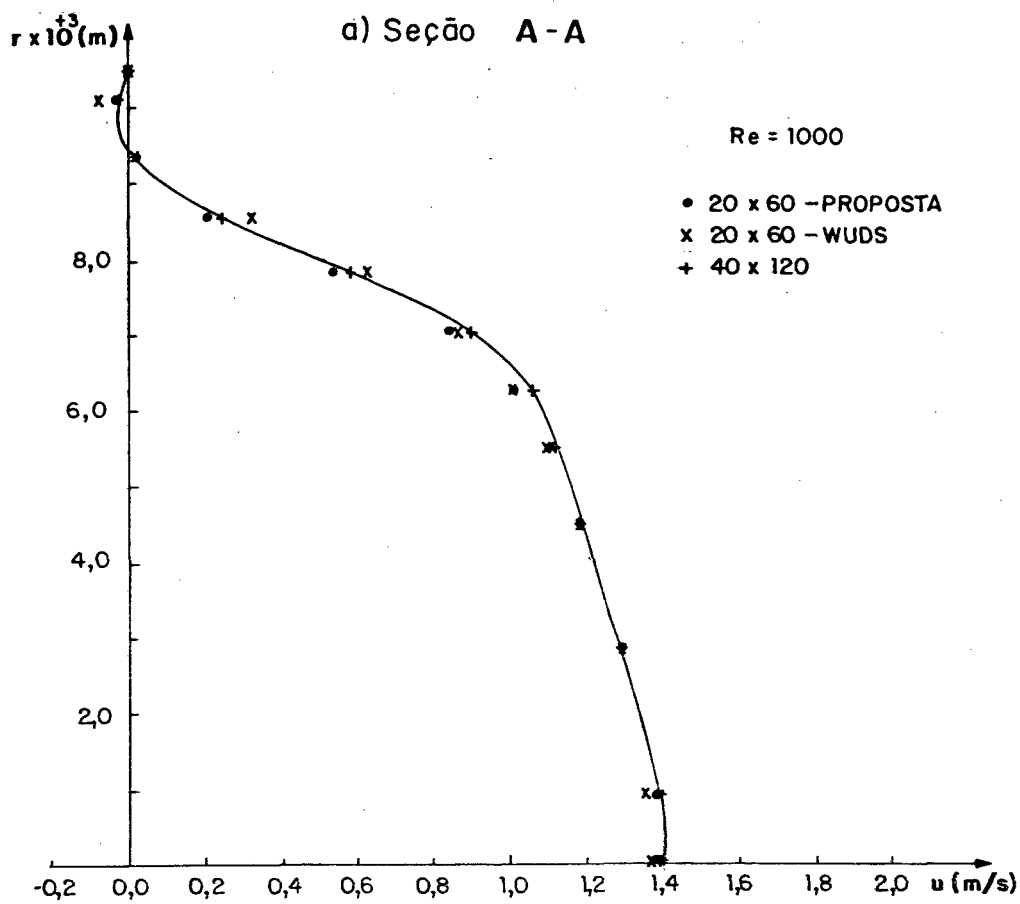


FIGURA 47 - Perfil da componente cartesiana de velocidade, u , nas seções A-A e B-B, no caso de $Re = 1000$, malhas 20x60.

A solução obtida com malha 40x120, utilizando-se o esquema proposto, é tomada como referência para o cálculo do erro relativo máximo da solução obtida utilizando-se a formulação proposta e o esquema WUDS, com malha 10x30 e 20x60, sendo estes resultados apresentados nos QUADROS 7 e 8, para os casos de $Re = 400$ e 1000, respectivamente. O erro relativo máximo é calculado com referência à velocidade máxima em cada seção.

QUADRO 7 - Erro relativo máximo obtido no perfil da componente cartesiana da velocidade, $Re = 400$.

FORMULAÇÃO	SEÇÃO	MALHA	ERRO RELATIVO MÁXIMO (%)
FUNÇÃO DE INTERPOLAÇÃO COMPLETA	A-A	10x30	5,8
		20x60	2,9
	B-B	10x30	3,3
		20x60	0,4
WUDS	A-A	10x30	5,1
		20x60	2,9
	B-B	10x30	4,2
		20x60	3,4

Analisando-se as FIGURAS 44 e 45, bem como o QUADRO 7, pode ser observado que, no caso de $Re = 400$, na seção A-A, os resultados obtidos com a utilização da função de interpolação completa e do esquema WUDS, com malhas 10x30 e 20x60 apresentam o mesmo comportamento, enquanto que, na seção B-B, tanto para malha 10x30, quanto 20x60, os resultados obtidos com a utilização da formulação proposta apresentam melhor concordância com os resultados obtidos

com malha refinada 40x120, quando comparados com o esquema WUDS.

QUADRO 8 - Erro relativo máximo obtido no perfil da componente cartesiana da velocidade, $Re = 1000$.

FORMULAÇÃO	SEÇÃO	MALHA	ERRO RELATIVO MÁXIMO (%)
FUNÇÃO DE INTERPOLAÇÃO COMPLETA	A-A	10x30	8,8
		20x60	4,4
	B-B	10x30	3,1
		20x60	1,3
WUDS	A-A	10x30	8,1
		20x60	5,9
	B-B	10x30	8,5
		20x60	6,3

Para o caso de $Re = 1000$, conforme se verifica nas FIGURAS 46 e 47, e QUADRO 8, na seção A-A, para malhas 10x30 e 20x60, o esquema proposto e o esquema WUDS apresentam desempenho semelhante, enquanto que, novamente, na seção B-B, melhor desempenho da formulação proposta, com relação ao esquema WUDS, é observado.

Convém salientar que a solução obtida neste trabalho, com malha 20x60, para ambos os casos de $Re = 400$ e $Re = 1000$, apresenta melhor concordância com a solução obtida com malha bastante refinada, 40x120, quando comparada com a solução obtida com o esquema WUDS, também com malha 20x60.

Os resultados apresentados neste capítulo, obtidos com a utilização da função de interpolação completa, apresentaram melhor concordância com as soluções tomadas como referência do que os obtidos com esquema WUDS. Além disto, a qualidade da solução obtida com o esquema proposto, com malha menos

refinada, é comparável à obtida com o esquema WUDS, com malha mais refinada, apresentando uma grande economia de tempo e memória computacional, o que incentiva a utilização da função de interpolação completa para a obtenção da solução de problemas envolvendo escoamento de fluidos e encoraja a continuidade dos estudos nesta direção.

A seguir serão apresentadas as principais conclusões deste trabalho, bem como, sugestões para trabalhos futuros.

CAPÍTULO 6

CONCLUSÕES E SUGESTÕES

O objetivo principal deste trabalho foi o desenvolvimento de uma metodologia numérica para a solução de problemas de escoamento de fluidos que apresentasse avanços em duas questões fundamentais dos métodos numéricos atuais, ou seja, a questão do armazenamento das variáveis na malha computacional e a questão da difusão numérica.

Ao longo da apresentação deste trabalho foram sendo salientados os pontos importantes da metodologia proposta com a indicação das contribuições realizadas. Neste capítulo, essas conclusões e observações são reunidas.

O arranjo de variáveis co-localizadas foi escolhido neste trabalho pois apresenta um único conjunto de volumes de controle para realização dos balanços de conservação, utilizando um único esquema de indexação para identificação das várias variáveis de solução com os índices nodais discretos, reduzindo a memória computacional necessária para armazenamento das variáveis do problema, comparativamente ao arranjo de variáveis desconstruídas. As vantagens da utilização deste arranjo escolhido são mais expressivas na solução de problemas envolvendo geometrias arbitrárias, em três dimensões.

Uma importante contribuição deste trabalho, na questão da difusão numérica, foi a proposição de uma nova função de interpolação, obtida das equações de conservação, em substituição às funções de interpolação que ponderam a predominância da convecção e difusão, utilizando somente os dois pontos vizinhos à face do volume de controle, independente da inclinação do vetor velocidade com relação à malha computacional. A função de interpolação

completa proposta contém a influência dos termos transiente, convectivo, difusivo, de pressão e fonte, visando levar em conta os aspectos físicos relevantes do problema em estudo, minimizando os erros numéricos, através de uma adequada avaliação das variáveis nas faces do volume de controle.

Muito embora a utilização da função de interpolação completa forneça uma equação discretizada com coeficientes mais complexos, o algoritmo resultante é bastante simples não sendo necessário o cálculo do ângulo entre o vetor velocidade e a malha computacional, como nos casos de utilização de funções de interpolação unidimensionais, por exemplo, como no esquema "skew upwind", o que confere maior generalidade ao método, uma vez que todas as influências importantes são automaticamente consideradas.

A solução analítica de problemas com termos fontes na equação da conservação da quantidade de movimento, apresentados por Shih, Tan e Hwang [9], permitiu comprovar que o modelo numérico implementado resolve, dentro dos erros inerentes às aproximações, as equações diferenciais governantes.

A solução do problema de convecção forçada em uma cavidade quadrada isotérmica, obtida utilizando-se a função de interpolação completa, para os casos de $Re = 100$, 400 e 1000 , mostra que a localização do centro dos vórtices primário, secundário esquerdo e secundário direito concorda com os resultados obtidos por Ghia et al. [44]. No caso de $Re = 1000$, o comprimento da região de recirculação localizada no canto inferior direito obtido com o esquema WUDS é muito menor que o obtido por Ghia et al. [44] e pela utilização da metodologia proposta. Para o caso de $Re = 1000$, onde a influência da convecção é significativa, o perfil de velocidades obtido neste trabalho, com malha 40×40 , aproxima-se marcadamente do perfil obtido por Ghia et al. [44], com malha 129×129 . Resultados dessa qualidade não são obtidos utilizando-se esquemas convencionais, como por exemplo, o WUDS.

A utilização da função de interpolação completa para a obtenção da

solução do problema de transporte, com velocidade uniforme, de um salto na variável escalar ϕ , onde a convecção é dominante, para o caso crítico de $\theta = 45^\circ$, que apresenta grande inclinação entre o vetor velocidade e as linhas coordenadas da malha, fornece um perfil de ϕ , na linha vertical central do domínio, obtido com malha 40x40, que concorda com o perfil analítico aproximado apresentado por Raithby [11], enquanto que este comportamento não é observado no perfil obtido com a utilização do esquema WUDS. A difusão da variável ϕ no domínio de cálculo, obtida com a utilização da formulação proposta, com malha 40x40, apresenta um erro de 1,6% relativamente à solução tomada como referência, enquanto que o esquema WUDS apresenta, para as mesmas condições, um erro relativo de 45,9%.

A solução do problema do escoamento entre duas placas planas paralelas com restrição de seção, obtida utilizando-se o esquema proposto, com malhas não ortogonais, 20x60, apresenta melhor concordância com a solução obtida com malhas refinadas, 40x120, do que a obtida com o esquema WUDS.

A metodologia proposta apresentou boas condições de estabilidade na solução de todos os problemas escolhidos, não se observando problemas de oscilações ou divergência da solução.

A função de interpolação completa, aqui proposta, apresentou um bom desempenho em todos os problemas estudados. Com relação ao esquema WUDS, houve uma redução significativa no erro da solução, relativamente a uma solução escolhida como referência, sem um aumento expressivo de tempo de processamento, nunca excedendo 15%.

Nos casos estudados, a solução obtida com a utilização do esquema proposto é semelhante à solução obtida com o esquema WUDS, com uma malha pelo menos duas vezes mais refinada, reduzindo portanto a necessidade de memória computacional bem como o tempo de CPU.

Acredita-se que a qualidade da solução obtida com a utilização da

função de interpolação completa, com malha menos refinada, aliada à economia de memória computacional resultante da utilização do arranjo de variáveis co-localizadas, torna a metodologia promissora para solução de problemas tridimensionais, envolvendo o escoamento de fluidos e transferência de calor e, o que é principal, o trabalho desenvolveu-se dentro de um enfoque que permite atingir generalidade, economia e precisão.

Como um principal trabalho para o futuro, sugere-se a extensão desta metodologia para a solução de problemas de escoamento de fluidos compressíveis. Logicamente, a extensão para três dimensões é necessária, pois é neste escopo que poderá verificar-se os benefícios da formulação. Ainda com o objetivo de conferir maior generalidade ao método, recomenda-se também a implementação do esquema desenvolvido no contexto de malhas estruturadas.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [01] Roache, P.J., Computational Fluid Dynamics, Hermosa Publishers, Albuquerque, N.M., USA, 1976.
- [02] Patankar, S.V., Numerical Heat Transfer and Fluid Flow, Hemisphere Publishing Co., Washington, DC., USA, 1980.
- [03] Taylor, C. and Hood, P., A Numerical Solution of the Navier-Stokes Equations Using the Finite Element Technique, Comput. Fluids, 1, pp. 73-100, 1973.
- [04] Oden, J.T. and Wellford, L.C., Analysis of Flow of Viscous Fluids by the Finite Element Method, AIAA Journal, 10, pp. 1590-1599, 1976.
- [05] Chung, T.J., Finite Element Analysis of Fluid Dynamics, McGraw-Hill, New York, 1978.
- [06] Raithby, G.D. and Schneider, G.E., Numerical Solution of Problems in Incompressible Fluid Flow: Treatment of the Velocity-Pressure Coupling, Numerical Heat Transfer, 2, pp. 417-440, 1979.
- [07] Maliska, C.R., A Solution Method for Three-dimensional Parabolic Fluid Flow Problems in Nonorthogonal Coordinates, Ph.D. Thesis, University of Waterloo, Canadá, 1981.
- [08] Raithby, G.D., Some Recent Advances in Computational Fluid Dynamics, Keynote Lecture, COBEM 87 - IX Congresso Brasileiro de Engenharia Mecânica, pp. 33-38, 1987.
- [09] Shih, T.M., Tan, C.H. and Hwang, B.C., Effects of Grid Staggering on Numerical Schemes, International Journal for Numerical Methods in Fluids, 9, pp. 193-212, 1989.

- [10] Silva, A.F.C., Um Procedimento em Volumes Finitos para a Solução de Escoamentos de Qualquer Velocidade, Tese de Doutorado, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis-SC, 1991.
- [11] Raithby, G.D., Skew Upstream Differencing Schemes for Problems Involving Fluid Flow, Comp. Meth. Applied Mech. Eng., 9, pp. 153-164, 1976.
- [12] Spalding, D.B., A Novel Finite Difference Formulation for Differential Expressions Involving Both First and Second Derivatives, Int. Journal Num. Meth. Eng., 4, pp. 551-559, 1972.
- [13] Raithby, G.D. and Torrance, K.E., Upstream-Weighted Differencing Schemes and their Application to Elliptic Problems Involving Fluid Flow, Computers and Fluids, 2, pp. 191-206, 1974.
- [14] Raithby, G.D., Prediction of Dispersion by Surface Discharge, Basin Investigation and Modelling Section, Canada Centre for Inland Waters, Burlington, Ontario, Canada, 1976.
- [15] Harlow, F.H. and Welch, J.E., Numerical Calculation of Time-Dependent Viscous Incompressible Flow of Fluid with Free Surface, Physics of Fluids, 8, pp. 2182-2189, 1965.
- [16] Vanka, S.P., Chen, C.J. and Sha, W.T., A Semi-Implicit Calculation Procedure for Flows Described in Boundary Fitted Coordinate Systems, Numerical Heat Transfer, 3, pp. 1-19, 1980.
- [17] Patankar, S.V. and Spalding, D.B., A Calculation Procedure for Heat, Mass and Momentum Transfer in Three-Dimensional Parabolic Flows, Int. J. Heat Mass Transfer, 15, pp. 1787-1806, 1972.
- [18] Maliska, C.R. and Raithby, G.D., A Method for Computing Three-Dimensional Flows Using Non-Orthogonal Boundary-Fitted Co-ordinates, International Journal for Numerical Methods in Fluids, 4, pp. 519-537, 1984.

- [19] Ramachandra, V. and Spalding, D.B., A Non-Orthogonal Finite Difference Formulation for the Three Dimensional Duct Flow, in Turbulent Forced Convection in Channels and Rod Bundles, Proceedings of NATO Advanced Study Institute, 1978.
- [20] Hsu, C., A Curvilinear-Coordinate Method for Momentum, Heat and Mass Transfer in Domains of Irregular Geometry, Ph.D. Thesis, University of Minnesota, USA, 1981.
- [21] Prakash, C., A Finite Element Method for Predicting Flow Through Ducts with Arbitrary Cross Sections, Ph.D. Thesis, University Minnesota, USA, 1981.
- [22] Rhie, C.M., A Numerical Study of the Flow Past an Isolated Airfoil with Separation, Ph.D. Thesis, University of Illinois, Urbana-Champaign, USA, 1981.
- [23] Rhie, C.M. and Chow, W.L., A Numerical Study of the Turbulent Flow Past an Isolated Airfoil with Trailing Edge Separation, AIAA-Paper-82-0998, 1982.
- [24] Rhie, C.M., Basic Calibration of Partially-Parabolic Procedure Aimed at Centrifugal Impeller Analysis, AIAA-83-0260, 1983.
- [25] Rhie, C.M., Delaney, R.A. and McKain, T.F., Three-Dimensional Viscous Flow Analysis for Centrifugal Impellers, AIAA-84-1296, 1984.
- [26] Peric, M., A Finite Volume Method for the Prediction of Three-Dimensional Fluid Flow in Complex Ducts, Ph.D. Thesis, University of London, England, 1985.
- [27] Burns, A.D., Wilkes, N.S., Jones, I.P. and Kightley, J.R., FLOW3D: Body-Fitted Coordinates, Atomic Energy Research Establishment, Harwell, U.K., Rept. N^o AERE-R-12262, 1986.
- [28] Baliga, B.R. and Patankar, S.V., A Control Volume Finite-Element Method for Two-Dimensional Fluid Flow and Heat Transfer, Numerical Heat Transfer, 6, pp. 245-261, 1983.

- [29] Schneider, G.E. and Zedan, M., Control-Volume-Based Finite Element Formulation of the Heat Conduction Equation, Spacecraft Thermal Control, Design, and Operation, Prog. Astronaut. Aeronaut., 86, pp. 305-327, 1983.
- [30] Schneider, G.E. and Raw, M.J., A Skewed, Positive Influence Coefficient Upwinding Procedure for Control-Volume-Based Finite-Element Convection-Diffusion Computation, Numerical Heat Transfer, 9, pp. 1-26, 1985.
- [31] Schneider, G.E. and Raw, M.J., Control Volume Finite-Element Method for Heat Transfer and Fluid Flow Using Colocated Variables - 1. Computational Procedure, Numerical Heat Transfer, 11, pp. 363-390, 1987.
- [32] Schneider, G.E. and Raw, M.J., Control Volume Finite-Element Method for Heat Transfer and Fluid Flow Using Colocated Variables - 2. Application and Validation, Numerical Heat Transfer, 11, pp. 391-400, 1987.
- [33] Peric, M., Kessler, R. Scheuerer, G., Comparison of Finite-Volume Numerical Methods with Staggered and Colocated Grids, Computers and Fluids, 16, pp. 389-403, 1988.
- [34] Camarero, R. and Reggio, M., Numerical Solution Procedure for Viscous Incompressible Flows, Numerical Heat Transfer, 10, pp. 131-146, 1986.
- [35] Schneider, G.E., A Novel Co-located Finite Difference Procedure for the Numerical Computation of Fluid Flow, AIAA - 4th Joint Thermophysics and Heat Transfer Conference, Boston, Massachusetts, 1986.
- [36] Majumdar, S., Role of Underrelaxation in Momentum Interpolation for Calculation of Flow with Non-Staggered Grids, Numerical Heat Transfer, 13, pp. 125-132, 1988.
- [37] Marchi, C.H., Maliska, C.R. and Bortoli, A.L., The Use of Co-located Variables in the Solution of Supersonic Flows, COBEM 89 - X Congresso Brasileiro de Engenharia Mecânica, 1989.

- [38] Marchi, C.H., Maliska, C.R. e Silva, A.F.C., A Boundary Fitted Numerical Method for the Solution of Three Dimensional All Speed Flows Using Co-Located Variables, II Encontro Nacional de Ciências Térmicas, 1, pp. 351-356, 1990.
- [39] Schneider, G.E. and Raw, M.J., A New Control-Volume-Based Finite-Element Procedure for the Numerical Solution of the Fluid Flow and Scalar Transport Equations, Final Report for the Atomic Energy of Canadá Ltd., Chalk River, Ontario, 1985.
- [40] Devarayalu, K., Numerical Solution of the Navier-Stokes Equation for Super-Sonic Flows with Strong Skocks, Ph.D. Thesis, Mississippi State University, USA, 1978.
- [41] Van Doormaal, J.P. and Raithby, G.D., Enhancements of the SIMPLE Method for Predicting Incompressible Fluid Flows, Numerical Heat Transfer, 7, pp. 147-163, 1984.
- [42] Schneider, G.E. and Zedan, M., A Modified Strongly Implicit Procedure for the Numerical Solution of Field Problems, Numerical Heat Transfer, 4, pp. 1-19, 1981.
- [43] Bortoli, A.L., O Uso de Variáveis Co-localizadas na Solução de Escoamentos Supersônicos sobre Corpos de Geometrias Arbitrárias, Tese de Mestrado, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis-SC, 1990.
- [44] Ghia, U., Ghia, K.N. and Shin, C.T., High-Re Solutions for Incompressible Flow Using the Navier-Stokes Equations and a Multi-Grid Method, Journal of Computational Physics, 48, pp. 387-411, 1982.
- [45] Ulson de Souza, S.M.A.G. e Maliska, C.R., Arranjo de Variáveis Co-localizadas no Método de Volumes Finitos, XI Congresso Ibero-Latino Americano sobre Métodos Computacionais para Engenharia, 1, pp. 177-191, Rio de Janeiro, 1990.

- [46] Ulson de Souza, S.M.A.G. e Maliska, C.R., Influência do Gradiente de Pressão na Função Interpolação do Método de Volumes Finitos, Simpósio Mineiro de Mecânica Computacional, pp. 256-263, Belo Horizonte - MG, Brasil, 1991.
- [47] Huget, R.G., The Evaluation and Development of Finite Volume Approximation Schemes for Fluid Flow and Heat Transfer Predictions, Ph.D. Thesis, Waterloo, Canadá, 1985.
- [48] Raw, M.J., A New Control-Volume Based Finite Element Procedure for the Numerical Solution of the Fluid Flow and Scalar Transport Equations, Ph.D. Thesis, Waterloo, Canadá, 1985.

APÊNDICE A

AVALIAÇÃO DA VARIÁVEL ϕ NAS FACES DO VOLUME DE CONTROLE

Para avaliação da variável ϕ nas faces do volume de controle centrado em P, foi proposta, no CAPÍTULO 3 deste trabalho, uma metodologia que emprega a equação de conservação da variável ϕ , escrita para cada uma das faces deste volume de controle, como por exemplo, a equação (111), escrita para a face leste. Cada termo desta equação foi discretizado, obtendo-se as seguintes equações, com $\Delta\xi = \Delta\eta = 1$, para a

- face leste

$$a_e^e \phi_e = a_e^0 \phi_e^0 + a_P^e \phi_P + a_E^e \phi_E + a_S^e \phi_S + a_N^e \phi_N + a_{NE}^e \phi_{NE} + a_{SE}^e \phi_{SE} + b_e^e \phi_e \quad (A.1)$$

onde

$$a_e^0 = \frac{\rho_e}{J_e \Delta t} \quad (A.2)$$

$$a_P^e = 4 C_{1e} + \rho_e U_e \quad (A.3)$$

$$a_E^e = 4 C_{1e} - \rho_e U_e \quad (A.4)$$

$$a_N^e = \frac{C_{3ne} \sqrt{\gamma_{NE}}}{(\sqrt{\gamma_N} + \sqrt{\gamma_{NE}})} - \frac{C_{2eN}}{2} - \frac{C_{2P}}{2} - \frac{\rho_e V_e \sqrt{\gamma_{NE}}}{2(\sqrt{\gamma_{NE}} + \sqrt{\gamma_N})} \quad (A.5)$$

$$a_S^e = \frac{C_{2eS}}{2} + \frac{C_{2P}}{2} + \frac{C_{3se} \sqrt{\gamma_{SE}}}{(\sqrt{\gamma_S} + \sqrt{\gamma_{SE}})} + \frac{\rho_e V_e \sqrt{\gamma_{SE}}}{2(\sqrt{\gamma_{SE}} + \sqrt{\gamma_S})} \quad (A.6)$$

$$a_{NE}^e = \frac{C_{2eN}}{2} + \frac{C_{2E}}{2} + \frac{C_{3ne} \sqrt{\gamma_N}}{(\sqrt{\gamma_N} + \sqrt{\gamma_{NE}})} - \frac{\rho_e V_e \sqrt{\gamma_N}}{2(\sqrt{\gamma_N} + \sqrt{\gamma_{NE}})} \quad (A.7)$$

$$a_{SE}^e = \frac{C_{3se} \sqrt{\gamma_S}}{(\sqrt{\gamma_S} + \sqrt{\gamma_{SE}})} - \frac{C_{2eS}}{2} - \frac{C_{2E}}{2} + \frac{\rho_e V_e \sqrt{\gamma_S}}{2(\sqrt{\gamma_{SE}} + \sqrt{\gamma_S})} \quad (A.8)$$

$$b_e^\phi = \frac{(\sqrt{\gamma_P} \hat{S}^\phi|_E + \sqrt{\gamma_E} \hat{S}^\phi|_P)}{(\sqrt{\gamma_P} + \sqrt{\gamma_E})} - \hat{P}^\phi|_e \quad (A.9)$$

$$a_e^e = a_e^0 + a_P^e + a_E^e + a_S^e + a_N^e + a_{NE}^e + a_{SE}^e \quad (A.10)$$

- face oeste

$$a_{ww}^w = a_{ww}^{00} + a_P^w \phi_P + a_W^w \phi_W + a_S^w \phi_S + a_N^w \phi_N + a_{NW}^w \phi_{NW} + a_{SW}^w \phi_{SW} + b_w^\phi \quad (A.11)$$

onde

$$a_w^0 = \frac{\rho_w}{J_w \Delta t} \quad (A.12)$$

$$a_P^w = 4 C_{1w} + \rho_w U_w \quad (A.13)$$

$$a_W^w = 4 C_{1w} - \rho_w U_w \quad (A.14)$$

$$a_N^w = \frac{C_{2wN}}{2} + \frac{C_{2P}}{2} + \frac{C_{3nw} \sqrt{\gamma_{NW}}}{(\sqrt{\gamma_{NW}} + \sqrt{\gamma_N})} - \frac{\rho_w V_w \sqrt{\gamma_{NW}}}{2(\sqrt{\gamma_N} + \sqrt{\gamma_{NW}})} \quad (A.15)$$

$$a_S^w = \frac{C_{3sw} \sqrt{\gamma_{SW}}}{(\sqrt{\gamma_{SW}} + \sqrt{\gamma_S})} - \frac{C_{2wS}}{2} - \frac{C_{2P}}{2} + \frac{\rho_w V_w \sqrt{\gamma_{SW}}}{2(\sqrt{\gamma_{SW}} + \sqrt{\gamma_S})} \quad (A.16)$$

$$a_{NW}^w = \frac{C_{3nw} \sqrt{\gamma_N}}{(\sqrt{\gamma_{NW}} + \sqrt{\gamma_N})} - \frac{C_{2wN}}{2} - \frac{C_{2W}}{2} - \frac{\rho_w V_w \sqrt{\gamma_N}}{2(\sqrt{\gamma_N} + \sqrt{\gamma_{NW}})} \quad (A.17)$$

$$a_{SW}^w = \frac{C_{2wS}}{2} + \frac{C_{2W}}{2} + \frac{C_{3sw} \sqrt{\gamma_S}}{(\sqrt{\gamma_{SW}} + \sqrt{\gamma_S})} + \frac{\rho_w V_w \sqrt{\gamma_S}}{2(\sqrt{\gamma_{SW}} + \sqrt{\gamma_S})} \quad (A.18)$$

$$b_w^\phi = \frac{(\sqrt{\gamma_w} \hat{S}^\phi|_P + \sqrt{\gamma_P} \hat{S}^\phi|_w)}{(\sqrt{\gamma_w} + \sqrt{\gamma_P})} - \hat{P}^\phi|_w \quad (A.19)$$

$$a_w^w = a_w^0 + a_p^w + a_w^w + a_S^w + a_N^w + a_{NW}^w + a_{SW}^w \quad (A.20)$$

- face norte

$$a_{nn}^n \phi_n = a_{nn}^0 \phi_n^0 + a_{Pp}^n \phi_P + a_{Nn}^n \phi_N + a_{Ee}^n \phi_E + a_{NEne}^n \phi_{NE} + a_{Ww}^n \phi_W + a_{NWnw}^n \phi_{NW} + b_n^\phi \quad (A.21)$$

onde

$$a_n^0 = \frac{\rho_n}{J_n \Delta t} \quad (A.22)$$

$$a_P^n = 4 C_{3n} + \rho_n V_n \quad (A.23)$$

$$a_N^n = 4 C_{3n} - \rho_n V_n \quad (A.24)$$

$$a_E^n = \frac{\sqrt{\alpha_{NE}} C_{1ne}}{(\sqrt{\alpha_E} + \sqrt{\alpha_{NE}})} - \frac{C_{2nE}}{2} + \frac{C_{2P}}{2} - \frac{\rho_n U_n \sqrt{\alpha_{NE}}}{2(\sqrt{\alpha_E} + \sqrt{\alpha_{NE}})} \quad (A.25)$$

$$a_W^n = \frac{\sqrt{\alpha_{NW}} C_{1nw}}{(\sqrt{\alpha_{NW}} + \sqrt{\alpha_W})} + \frac{C_{2nw}}{2} + \frac{C_{2P}}{2} + \frac{\rho_n U_n \sqrt{\alpha_{NW}}}{2(\sqrt{\alpha_W} + \sqrt{\alpha_{NW}})} \quad (A.26)$$

$$a_{NE}^n = \frac{\sqrt{\alpha_E} C_{1ne}}{(\sqrt{\alpha_E} + \sqrt{\alpha_{NE}})} + \frac{C_{2nE}}{2} + \frac{C_{2N}}{2} - \frac{\rho_n U_n \sqrt{\alpha_E}}{2(\sqrt{\alpha_E} + \sqrt{\alpha_{NE}})} \quad (A.27)$$

$$a_{NW}^n = \frac{\sqrt{\alpha_W} C_{1nw}}{(\sqrt{\alpha_W} + \sqrt{\alpha_{NW}})} - \frac{C_{2nw}}{2} - \frac{C_{2N}}{2} + \frac{\rho_n U_n \sqrt{\alpha_W}}{2(\sqrt{\alpha_W} + \sqrt{\alpha_{NW}})} \quad (A.28)$$

$$b_n^\phi = \frac{(\sqrt{\alpha_P} \hat{S}^\phi|_N + \sqrt{\alpha_N} \hat{S}^\phi|_P)}{(\sqrt{\alpha_P} + \sqrt{\alpha_N})} - \hat{P}^\phi|_n \quad (A.29)$$

$$a_n^n = a_n^0 + a_P^n + a_N^n + a_E^n + a_{NE}^n + a_W^n + a_{NW}^n \quad (A.30)$$

- face sul

$$a_{ss}^s \phi = a_{ss}^{0,0} + a_P^s \phi_P + a_S^s \phi_S + a_E^s \phi_E + a_{SE}^s \phi_{SE} + a_W^s \phi_W + a_{SW}^s \phi_{SW} + b_s^\phi \quad (A.31)$$

onde

$$a_s^0 = \frac{\rho_s}{J_s \Delta t} \quad (A.32)$$

$$a_S^s = 4 C_{3s} + \rho_s V_s \quad (A.33)$$

$$a_P^s = 4 C_{3s} - \rho_s V_s \quad (A.34)$$

$$a_{SE}^s = \frac{\sqrt{\alpha_E} C_{1se}}{(\sqrt{\alpha_{SE}} + \sqrt{\alpha_E})} - \frac{C_{2sE}}{2} - \frac{C_{2S}}{2} - \frac{\rho_s U_s \sqrt{\alpha_E}}{2(\sqrt{\alpha_{SE}} + \sqrt{\alpha_E})} \quad (A.35)$$

$$a_{SW}^s = \frac{\sqrt{\alpha}_W C_{1sw}}{(\sqrt{\alpha}_W + \sqrt{\alpha}_{SW})} + \frac{C_{2sw}}{2} + \frac{C_{2s}}{2} + \frac{\rho_s U_s \sqrt{\alpha}_W}{2(\sqrt{\alpha}_W + \sqrt{\alpha}_{SW})} \quad (A.36)$$

$$a_E^s = \frac{\sqrt{\alpha}_{SE} C_{1se}}{(\sqrt{\alpha}_{SE} + \sqrt{\alpha}_E)} + \frac{C_{2se}}{2} + \frac{C_{2p}}{2} - \frac{\rho_s U_s \sqrt{\alpha}_{SE}}{2(\sqrt{\alpha}_{SE} + \sqrt{\alpha}_E)} \quad (A.37)$$

$$a_W^s = \frac{\sqrt{\alpha}_{SW} C_{1sw}}{(\sqrt{\alpha}_{SW} + \sqrt{\alpha}_W)} - \frac{C_{2sw}}{2} + \frac{C_{2p}}{2} + \frac{\rho_s U_s \sqrt{\alpha}_{SW}}{2(\sqrt{\alpha}_{SW} + \sqrt{\alpha}_W)} \quad (A.38)$$

$$b_s^\phi = \frac{(\sqrt{\alpha}_s \hat{S}^\phi|_P + \sqrt{\alpha}_P \hat{S}^\phi|_s)}{(\sqrt{\alpha}_s + \sqrt{\alpha}_P)} - \hat{P}^\phi|_s \quad (A.39)$$

$$a_s^s = a_s^0 + a_P^s + a_S^s + a_E^s + a_{SE}^s + a_W^s + a_{SW}^s \quad (A.40)$$

Os termos $\hat{P}^\phi|_i$, que aparecem nas expressões para o cálculo de b_i^ϕ , onde $i = e, n, s, w$, podem ser obtidos por diferença central, resultando em

$$\begin{aligned} \hat{P}^u|_e &= y_\eta|_e (P_E - P_P) - \frac{y_\xi|_e (\sqrt{\gamma}_N P_{NE} + \sqrt{\gamma}_{NE} P_N)}{2 (\sqrt{\gamma}_N + \sqrt{\gamma}_{NE})} + \\ &+ \frac{y_\xi|_e (\sqrt{\gamma}_{SE} P_S + \sqrt{\gamma}_S P_{SE})}{2 (\sqrt{\gamma}_S + \sqrt{\gamma}_{SE})} \end{aligned} \quad (A.41)$$

$$\begin{aligned} \hat{P}^v|_e &= \frac{x_\xi|_e}{2} \left\{ \frac{\sqrt{\gamma}_{NE} P_N + \sqrt{\gamma}_N P_{NE}}{(\sqrt{\gamma}_N + \sqrt{\gamma}_{NE})} - \frac{\sqrt{\gamma}_{SE} P_S + \sqrt{\gamma}_S P_{SE}}{(\sqrt{\gamma}_S + \sqrt{\gamma}_{SE})} \right\} - \\ &- x_\eta|_e (P_E - P_P) \end{aligned} \quad (A.42)$$

$$\hat{P}^v|_w = \frac{x_\xi|_w}{2} \left\{ \frac{\sqrt{\gamma}_N P_{NW} + \sqrt{\gamma}_{NW} P_N}{(\sqrt{\gamma}_N + \sqrt{\gamma}_{NW})} - \frac{\sqrt{\gamma}_S P_{SW} + \sqrt{\gamma}_{SW} P_S}{(\sqrt{\gamma}_S + \sqrt{\gamma}_{SW})} \right\} -$$

$$- x_\eta|_w (P_P - P_W) \quad (A. 43)$$

$$\hat{P}^u|_w = y_\eta|_w (P_P - P_W) - \frac{y_\xi|_w (\sqrt{\gamma}_N P_{NW} + \sqrt{\gamma}_{NW} P_N)}{2 (\sqrt{\gamma}_N + \sqrt{\gamma}_{NW})} +$$

$$+ \frac{y_\xi|_w (\sqrt{\gamma}_{SW} P_S + \sqrt{\gamma}_S P_{SW})}{2 (\sqrt{\gamma}_{SW} + \sqrt{\gamma}_S)} \quad (A. 44)$$

$$\hat{P}^u|_n = \frac{y_\eta|_n}{2} \left\{ \frac{\sqrt{\alpha}_E P_{NE} + \sqrt{\alpha}_{NE} P_E}{(\sqrt{\alpha}_E + \sqrt{\alpha}_{NE})} - \frac{\sqrt{\alpha}_W P_{NW} + \sqrt{\alpha}_{NW} P_W}{(\sqrt{\alpha}_W + \sqrt{\alpha}_{NW})} \right\} -$$

$$- y_\xi|_n (P_N - P_P) \quad (A. 45)$$

$$\hat{P}^v|_n = x_\xi|_n (P_N - P_P) - \frac{x_\eta|_n}{2} \left\{ \frac{\sqrt{\alpha}_E P_{NE} + \sqrt{\alpha}_{NE} P_E}{2 (\sqrt{\alpha}_E + \sqrt{\alpha}_{NE})} - \right.$$

$$\left. - \frac{\sqrt{\alpha}_W P_{NW} + \sqrt{\alpha}_{NW} P_W}{(\sqrt{\alpha}_W + \sqrt{\alpha}_{NW})} \right\} \quad (A. 46)$$

$$\begin{aligned} \hat{P}^u|_s &= \frac{y_\eta|_s}{2} \left\{ \frac{\sqrt{\alpha}_{SE} P_E + \sqrt{\alpha}_E P_{SE}}{(\sqrt{\alpha}_E + \sqrt{\alpha}_{SE})} - \frac{\sqrt{\alpha}_{SW} P_W + \sqrt{\alpha}_W P_{SW}}{(\sqrt{\alpha}_{SW} + \sqrt{\alpha}_W)} \right\} - \\ &- y_\xi|_s (P_P - P_S) \end{aligned} \quad (A.47)$$

$$\begin{aligned} \hat{P}^v|_s &= x_\xi|_s (P_P - P_S) - \frac{x_\eta|_s}{2} \left\{ \frac{\sqrt{\alpha}_{SE} P_E + \sqrt{\alpha}_E P_{SE}}{(\sqrt{\alpha}_{SE} + \sqrt{\alpha}_E)} - \right. \\ &- \left. \frac{\sqrt{\alpha}_{SW} P_W + \sqrt{\alpha}_W P_{SW}}{(\sqrt{\alpha}_{SW} + \sqrt{\alpha}_W)} \right\} \end{aligned} \quad (A.48)$$

APÊNDICE B

COMPONENTES DO GRADIENTE DA VARIÁVEL ϕ NA DIREÇÃO NORMAL
ÀS FACES DO VOLUME DE CONTROLE

As componentes do gradiente da variável ϕ na direção normal às faces do volume de controle centrado em P são expressas pelas seguintes equações:

- face leste

$$\left. \frac{\partial \phi}{\partial n} \right|_e = \left[\frac{1}{\Gamma_\phi \sqrt{\alpha}} \left(C_1 \frac{\partial \phi}{\partial \xi} + C_2 \frac{\partial \phi}{\partial \eta} \right) \right] \Big|_e \quad (\text{B.1})$$

- face norte

$$\left. \frac{\partial \phi}{\partial n} \right|_n = \left[\frac{1}{\Gamma_\phi \sqrt{\gamma}} \left(C_2 \frac{\partial \phi}{\partial \xi} + C_3 \frac{\partial \phi}{\partial \eta} \right) \right] \Big|_n \quad (\text{B.2})$$

Expressões análogas às equações (B.1) e (B.2) podem ser escritas para as faces oeste e sul do volume de controle. Estas equações podem ser discretizadas, utilizando-se o esquema de diferença central, nas direções ξ e η , com $\Delta \xi = \Delta \eta = 1$, resultando nas seguintes equações:

- face leste

$$\left. \frac{\partial \phi}{\partial n} \right|_e = \frac{C_{1e}}{\Gamma_e^\phi \sqrt{\alpha_e}} (\phi_E - \phi_P) + \frac{C_{2e}}{2 \Gamma_e^\phi \sqrt{\alpha_e}} \left\{ \frac{\sqrt{\gamma_{NE}} \phi_N + \sqrt{\gamma_N} \phi_{NE}}{(\sqrt{\gamma_N} + \sqrt{\gamma_{NE}})} - \frac{\sqrt{\gamma_{SE}} \phi_S + \sqrt{\gamma_S} \phi_{SE}}{(\sqrt{\gamma_S} + \sqrt{\gamma_{SE}})} \right\} \quad (B.3)$$

- face oeste

$$\left. \frac{\partial \phi}{\partial n} \right|_w = - \frac{C_{1w}}{\Gamma_w^\phi \sqrt{\alpha_w}} (\phi_P - \phi_W) - \frac{C_{2w}}{2 \Gamma_w^\phi \sqrt{\alpha_w}} \left\{ \frac{\sqrt{\gamma_N} \phi_{NW} + \sqrt{\gamma_{NW}} \phi_N}{(\sqrt{\gamma_N} + \sqrt{\gamma_{NW}})} - \frac{\sqrt{\gamma_S} \phi_{SW} + \sqrt{\gamma_{SW}} \phi_S}{(\sqrt{\gamma_S} + \sqrt{\gamma_{SW}})} \right\} \quad (B.4)$$

- face norte

$$\left. \frac{\partial \phi}{\partial n} \right|_n = \frac{1}{\Gamma_n^\phi \sqrt{\gamma_n}} \left\{ C_{3n} (\phi_N - \phi_P) + \frac{C_{2n}}{2} \left[\frac{\sqrt{\alpha_E} \phi_{NE} + \sqrt{\alpha_{NE}} \phi_E}{(\sqrt{\alpha_E} + \sqrt{\alpha_{NE}})} - \frac{\sqrt{\alpha_W} \phi_{NW} + \sqrt{\alpha_{NW}} \phi_W}{(\sqrt{\alpha_W} + \sqrt{\alpha_{NW}})} \right] \right\} \quad (B.5)$$

- face sul

$$\left. \frac{\partial \phi}{\partial n} \right|_s = - \frac{1}{\Gamma_s^\phi \sqrt{\gamma_s}} \left\{ C_{3s} (\phi_P - \phi_S) + \frac{C_{2s}}{2} \left[\frac{\sqrt{\alpha_{SE}} \phi_E + \sqrt{\alpha_E} \phi_{SE}}{(\sqrt{\alpha_E} + \sqrt{\alpha_{SE}})} - \frac{\sqrt{\alpha_{SW}} \phi_W + \sqrt{\alpha_W} \phi_{SW}}{(\sqrt{\alpha_{SW}} + \sqrt{\alpha_W})} \right] \right\} \quad (B.6)$$

APÊNDICE C

EQUAÇÃO PARA AVALIAÇÃO DA VARIÁVEL ϕ NO CENTRO
DO VOLUME DE CONTROLE

A equação discretizada, que expressa a conservação da grandeza ϕ , é apresentada no CAPÍTULO 3 deste trabalho através da equação (107). As expressões obtidas para avaliação da variável ϕ e da derivada de ϕ na direção normal às faces do volume de controle centrado em P, apresentadas nos APÊNDICES A e B deste trabalho, dadas pelas equações (A.1), (A.11), (A.21), (A.31), (B.3), (B.4), (B.5) e (B.6), são substituídas na equação (107), fornecendo

$$a_P \phi_P = a_P^0 \phi_P^0 + (a_e^0)^* \phi_e^0 + (a_w^0)^* \phi_w^0 + (a_n^0)^* \phi_n^0 + (a_s^0)^* \phi_s^0 + a_e \phi_E + a_n \phi_N + \\ + a_s \phi_S + a_w \phi_W + a_{ne} \phi_{NE} + a_{se} \phi_{SE} + a_{nw} \phi_{NW} + a_{sw} \phi_{SW} + b_P \phi_P - L \left[\hat{P}_P^{\phi} \right] \quad (C.1)$$

onde

$$a_P^0 = \frac{\rho_P}{J_P \Delta t} \quad (C.2)$$

$$(a_e^0)^* = - \frac{\dot{m}_{fe} a_e^0}{a_e^e} \quad (C.3)$$

$$(a_w^0)^* = \frac{\dot{m}_{fw} a_w^0}{a_w^w} \quad (C.4)$$

$$(a_n^0)^* = - \frac{\dot{m}_{fn} a_n^0}{a_n^n} \quad (C.5)$$

$$(a_s^0)^* = \frac{\dot{m}_{fs} a_s^0}{a_s^s} \quad (C.6)$$

$$a_e = - \frac{a_E^e}{a_e^e} \dot{m}_{fe} + \frac{a_E^s}{a_s^s} \dot{m}_{fs} - \frac{a_E^n}{a_n^n} \dot{m}_{fn} + C_{1e} +$$

$$+ \frac{C_{2n} \sqrt{\alpha_{NE}}}{2(\sqrt{\alpha_E} + \sqrt{\alpha_{NE}})} - \frac{C_{2s}}{2} \frac{\sqrt{\alpha_{SE}}}{(\sqrt{\alpha_{SE}} + \sqrt{\alpha_E})} \quad (C.7)$$

$$a_n = - \frac{a_N^e}{a_e^e} \dot{m}_{fe} + \frac{a_N^w}{a_w^w} \dot{m}_{fw} - \frac{a_N^n}{a_n^n} \dot{m}_{fn} + C_{3n} +$$

$$+ \frac{C_{2e}}{2} \frac{\sqrt{\gamma_{NE}}}{(\sqrt{\gamma_N} + \sqrt{\gamma_{NE}})} - \frac{C_{2w}}{2} \frac{\sqrt{\gamma_{NW}}}{(\sqrt{\gamma_N} + \sqrt{\gamma_{NW}})} \quad (C.8)$$

$$a_w = \frac{a_w^w}{a_w^w} \dot{m}_{fw} + \frac{a_w^s}{a_s^s} \dot{m}_{fs} - \frac{a_w^n}{a_n^n} \dot{m}_{fn} + C_{1w} -$$

$$- \frac{C_{2n}}{2} \frac{\sqrt{\alpha_{NW}}}{(\sqrt{\alpha_w} + \sqrt{\alpha_{NW}})} + \frac{C_{2s}}{2} \frac{\sqrt{\alpha_{SW}}}{(\sqrt{\alpha_{SW}} + \sqrt{\alpha_w})} \quad (C.9)$$

$$a_s = - \frac{a_s^e}{a_e^e} \dot{m}_{fe} + \frac{a_s^w}{a_w^w} \dot{m}_{fw} + \frac{a_s^s}{a_s^s} \dot{m}_{fs} + C_{3s} +$$

$$+ \frac{C_{2w}}{2} \frac{\sqrt{\gamma_{SW}}}{(\sqrt{\gamma_{SW}} + \sqrt{\gamma_s})} - \frac{C_{2e}}{2} \frac{\sqrt{\gamma_{SE}}}{(\sqrt{\gamma_{SE}} + \sqrt{\gamma_s})} \quad (C.10)$$

$$a_{ne} = -\frac{a_{NE}^e}{a_e^e} \dot{m}_{fe} - \frac{a_{NE}^n}{a_n^n} \dot{m}_{fn} + \frac{C_{2e}}{2} \frac{\sqrt{\gamma}_N}{(\sqrt{\gamma}_N + \sqrt{\gamma}_{NE})} + \frac{C_{2n}}{2} \frac{\sqrt{\alpha}_E}{(\sqrt{\alpha}_E + \sqrt{\alpha}_{NE})} \quad (C.11)$$

$$a_{se} = -\frac{a_{SE}^e}{a_e^e} \dot{m}_{fe} + \frac{a_{SE}^s}{a_s^s} \dot{m}_{fs} - \frac{C_{2e}}{2} \frac{\sqrt{\gamma}_S}{(\sqrt{\gamma}_S + \sqrt{\gamma}_{SE})} - \frac{C_{2s}}{2} \frac{\sqrt{\alpha}_E}{(\sqrt{\alpha}_E + \sqrt{\alpha}_{SE})} \quad (C.12)$$

$$a_{nw} = \frac{a_{NW}^w}{a_w^w} \dot{m}_{fw} - \frac{a_{NW}^n}{a_n^n} \dot{m}_{fn} - \frac{C_{2w}}{2} \frac{\sqrt{\gamma}_N}{(\sqrt{\gamma}_N + \sqrt{\gamma}_{NW})} - \frac{C_{2n}}{2} \frac{\sqrt{\alpha}_W}{(\sqrt{\alpha}_W + \sqrt{\alpha}_{NW})} \quad (C.13)$$

$$a_{sw} = \frac{a_{SW}^w}{a_w^w} \dot{m}_{fw} + \frac{a_{SW}^s}{a_s^s} \dot{m}_{fs} + \frac{C_{2w}}{2} \frac{\sqrt{\gamma}_S}{(\sqrt{\gamma}_S + \sqrt{\gamma}_{SW})} + \frac{C_{2s}}{2} \frac{\sqrt{\alpha}_W}{(\sqrt{\alpha}_W + \sqrt{\alpha}_{SW})} \quad (C.14)$$

$$b_P^\phi = -\frac{b_e^\phi}{a_e^e} \dot{m}_{fe} + \frac{b_w^\phi}{a_w^w} \dot{m}_{fw} + \frac{b_s^\phi}{a_s^s} \dot{m}_{fs} - \frac{b_n^\phi}{a_n^n} \dot{m}_{fn} + L \left[\hat{S}_P^\phi \right] \quad (C.15)$$

$$\begin{aligned} L \left[\hat{P}_P^u \right] &= y_{\eta|e} \left\{ \frac{\sqrt{\gamma}_E P_P + \sqrt{\gamma}_P P_E}{(\sqrt{\gamma}_P + \sqrt{\gamma}_E)} \right\} - y_{\eta|w} \left\{ \frac{\sqrt{\gamma}_W P_P + \sqrt{\gamma}_P P_W}{(\sqrt{\gamma}_P + \sqrt{\gamma}_W)} \right\} + \\ &+ y_{\xi|s} \left\{ \frac{\sqrt{\alpha}_S P_P + \sqrt{\alpha}_P P_S}{(\sqrt{\alpha}_P + \sqrt{\alpha}_S)} \right\} - y_{\xi|n} \left\{ \frac{\sqrt{\alpha}_N P_P + \sqrt{\alpha}_P P_N}{(\sqrt{\alpha}_P + \sqrt{\alpha}_N)} \right\} \end{aligned} \quad (C.16)$$

$$\begin{aligned} L \left[\hat{P}_P^v \right] &= -x_{\eta|e} \left\{ \frac{\sqrt{\gamma}_E P_P + \sqrt{\gamma}_P P_E}{(\sqrt{\gamma}_P + \sqrt{\gamma}_E)} \right\} + x_{\eta|w} \left\{ \frac{\sqrt{\gamma}_W P_P + \sqrt{\gamma}_P P_W}{(\sqrt{\gamma}_P + \sqrt{\gamma}_W)} \right\} - \\ &- x_{\xi|s} \left\{ \frac{\sqrt{\alpha}_S P_P + \sqrt{\alpha}_P P_S}{(\sqrt{\alpha}_P + \sqrt{\alpha}_S)} \right\} + x_{\xi|n} \left\{ \frac{\sqrt{\alpha}_N P_P + \sqrt{\alpha}_P P_N}{(\sqrt{\alpha}_P + \sqrt{\alpha}_N)} \right\} \end{aligned} \quad (C.17)$$

$$\begin{aligned}
 a_p = & a_p^0 + (a_e^0)^* + (a_n^0)^* + (a_s^0)^* + (a_w^0) + a_e + a_n + a_s + a_w + \\
 & + a_{ne} + a_{nw} + a_{se} + a_{sw}
 \end{aligned}$$

(C.18)

e os coeficientes a_i e b_i estão definidos no APÊNDICE A deste trabalho.

APÊNDICE D

EQUAÇÃO PARA CORREÇÃO DA PRESSÃO NO CENTRO DO VOLUME DE CONTROLE

A equação para correção da pressão, utilizando-se o método SIMPLEX, proposto por Van Doormaal e Raithby [41], obtida na seção 4.1.1, do CAPÍTULO 4 deste trabalho, é dada por

$$a_{P,P}^{P,P'} = a_{E,E}^{P,P'} + a_{W,W}^{P,P'} + a_{N,N}^{P,P'} + a_{S,S}^{P,P'} + \\ + a_{NE,NE}^{P,P'} + a_{NW,NW}^{P,P'} + a_{SE,SE}^{P,P'} + a_{SW,SW}^{P,P'} + b^P \quad (D.1)$$

onde

$$a_E^P = \rho_e \alpha_e d_e^u - \frac{\rho_n \beta_n d_n^v \sqrt{\alpha_{NE}}}{2(\sqrt{\alpha_{NE}} + \sqrt{\alpha_E})} + \frac{\rho_s \beta_s d_s^v \sqrt{\alpha_{SE}}}{2(\sqrt{\alpha_E} + \sqrt{\alpha_{SE}})} \quad (D.2)$$

$$a_W^P = \rho_w \alpha_w d_w^u + \frac{\rho_n \beta_n d_n^v \sqrt{\alpha_{NW}}}{2(\sqrt{\alpha_{NW}} + \sqrt{\alpha_W})} - \frac{\rho_s \beta_s d_s^v \sqrt{\alpha_{SW}}}{2(\sqrt{\alpha_{SW}} + \sqrt{\alpha_W})} \quad (D.3)$$

$$a_N^P = \rho_n \gamma_n d_n^u - \frac{\rho_e \beta_e d_e^u \sqrt{\gamma_{NE}}}{2(\sqrt{\gamma_N} + \sqrt{\gamma_{NE}})} + \frac{\rho_w \beta_w d_w^u \sqrt{\gamma_{NW}}}{2(\sqrt{\gamma_N} + \sqrt{\gamma_{NW}})} \quad (D.4)$$

$$a_S^P = \rho_s \gamma_s d_s^u + \frac{\rho_e \beta_e d_e^u \sqrt{\gamma_{SE}}}{2(\sqrt{\gamma_S} + \sqrt{\gamma_{SE}})} - \frac{\rho_w \beta_w d_w^u \sqrt{\gamma_{SW}}}{2(\sqrt{\gamma_S} + \sqrt{\gamma_{SW}})} \quad (D.5)$$

$$a_{NE}^P = - \frac{\rho_e \beta_e d_e^u \sqrt{\gamma_N}}{2(\sqrt{\gamma_N} + \sqrt{\gamma_{NE}})} - \frac{\rho_n \beta_n d_n^v \sqrt{\alpha_E}}{2(\sqrt{\alpha_{NE}} + \sqrt{\alpha_E})} \quad (D.6)$$

$$a_{NW}^P = \frac{\rho_w \beta_w d_w^u \sqrt{\gamma_N}}{2(\sqrt{\gamma_N} + \sqrt{\gamma_{NW}})} + \frac{\rho_n \beta_n d_n^v \sqrt{\alpha_W}}{2(\sqrt{\alpha_{NW}} + \sqrt{\alpha_W})} \quad (D.7)$$

$$a_{SE}^P = \frac{\rho_e \beta_e d_e^u \sqrt{\gamma_S}}{2(\sqrt{\gamma_S} + \sqrt{\gamma_{SE}})} + \frac{\rho_s \beta_s d_s^v \sqrt{\alpha_E}}{2(\sqrt{\alpha_E} + \sqrt{\alpha_{SE}})} \quad (D.8)$$

$$a_{SW}^P = -\frac{\rho_w \beta_w d_w^u \sqrt{\gamma_S}}{2(\sqrt{\gamma_S} + \sqrt{\gamma_{SW}})} - \frac{\rho_s \beta_s d_s^v \sqrt{\alpha_W}}{2(\sqrt{\alpha_{SW}} + \sqrt{\alpha_W})} \quad (D.9)$$

$$b^P = -\rho_e U_e^* + \rho_w U_w^* - \rho_n V_n^* + \rho_s V_s^* \quad (D.10)$$

$$a_P^P = a_E^P + a_W^P + a_N^P + a_S^P + a_{NE}^P + a_{NW}^P + a_{SE}^P + a_{SW}^P \quad (D.11)$$

Os coeficientes d_e^u , d_w^u , d_n^v e d_s^v podem ser dados por

$$d_e^u = \frac{d_P^u + d_E^u}{2} \quad (D.12)$$

$$d_w^u = \frac{d_P^u + d_W^u}{2} \quad (D.13)$$

$$d_n^v = \frac{d_P^v + d_N^v}{2} \quad (D.14)$$

$$d_s^v = \frac{d_P^v + d_S^v}{2} \quad (D.15)$$

onde

$$d_P^u = d_P^v = \frac{1}{a_P - \sum_{nb} a_{nb}} \quad (D.16)$$

e os coeficientes a_p e $\sum_{nb} a_{nb}$ estão definidos no APÊNDICE C deste trabalho.

Os fluxos de massa que aparecem no termo fonte b^p são calculados conforme o procedimento descrito na seção 4.1.2, do CAPÍTULO 4 deste trabalho.